Má-li vektorová funkce $\vec{f}(x,y,z)$ popisující vektorové (silové) pole spojité všechny složky na hladké (**orientované**) křivce γ, kde

- oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi: $x=\varphi(t)\,;\; y=\psi(t)\,;\; z=\chi(t)\,;\; t\in\langle\alpha\,;\beta\rangle$, což lze vyjádřit vektorově takto $\gamma : \vec{r}=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\chi(t)\vec{k}$
- **TEČKA** má význam skalárního součinu dvou vektorů
- označuje-li $(\vec{r})'=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, pak $\mathrm{d}\vec{r}=(\vec{r})'\,\mathrm{d}t=\big(\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\big)\;\mathrm{d}t$

můžeme podle str. 13 dole skript [1], zavést **křivkový integrál ve vektorovém poli** jako

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_\alpha^\beta \vec{f}\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\big(\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\big)\;\mathrm{d}t$$

nebo jinak

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_\alpha^\beta \vec{f}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\;\mathrm{d}t$$

což (po provedeném předepsaném skalárním součinu) někdy také píšeme ve tvaru

$$\int_\alpha^\beta \vec{f}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{dt},\frac{\mathrm{d}y}{dt},\frac{\mathrm{d}z}{dt}\right)\;\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta x(t)\;\mathrm{d}x+y(t)\;\mathrm{d}y+z(t)\;\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta \big(x(t).x'(t)+y(t).y'(t)+z(t).z'(t)\big)\;\mathrm{d}t$$

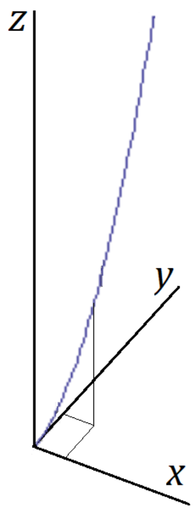
1. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_\gamma (y\vec{i}-x\vec{j}+2z\vec{k})\cdot\mathrm{d}\vec{r}\;,$$ kde souřadnice bodů křivky γ vyhovují vztahům:

$/x\in\mathbb{R};\; y\in\mathbb{R};\; z\in\mathbb{R}/$ $\qquad 0\le x\le 1\,;\;\; x=y\,;\;\; z=2x^2+3y^2$

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ,

když za proměnnou x zvolíme parametr t.



$x=t \qquad x'=1$

$y=t \qquad y'=1$

$z=2t^2+3t^2=5t^2 \qquad z'=10t$

$t\in\langle 0\,;\,1\rangle$

$$\int_\gamma (y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+2z\,\vec{k})\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^1 (t\,\vec{i}-t\,\vec{j}+10t^2\,\vec{k})\cdot(1\,\vec{i}+1\,\vec{j}+10t\,\vec{k})\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^1 (t-t+100\,t^3)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 100\,t^3\,\mathrm{d}t=\left[100\,\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\left[25\,t^4\right]_0^1=$$

primitivní funkce je spojitá pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,1\rangle$, proto $\quad =25\,(1-0)=\underline{\underline{25}}$

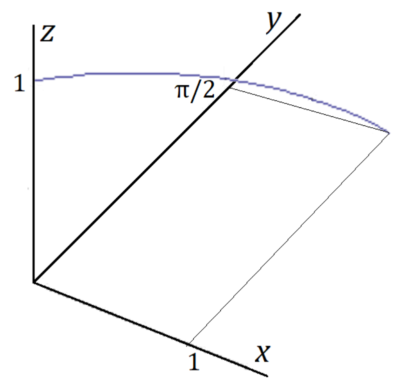
[1] Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

2. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_\gamma (z\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + x\,\vec{k}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;,$$ kde křivka γ je tvořena body o souřadnicích:

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$ $[\sin t\,;\, t\,;\, \cos t]$ a $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

K zadaným **parametrickým rovnicím křivky** γ připíšeme derivace jednotlivých souřadnic.



$$x = \sin t \qquad x' = \cos t$$
$$y = t \qquad y' = 1$$
$$z = \cos t \qquad z' = -\sin t$$
$$t \in \left\langle 0\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\int_\gamma (z\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + x\,\vec{k}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t\,\vec{i} + \sin t\ \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}) \cdot (\cos t\,\vec{i} + 1\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2 t - \sin^2 t) + \frac{1}{2}(2\ \sin t\ \cos t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2t + \frac{1}{2}\ \sin 2t\right) \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{r} 2t = u \\ 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2} \end{array} & \begin{array}{c} t \\ \hline \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} u \\ \hline \pi \\ 0 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\cos u + \frac{1}{2}\ \sin u\right) \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin u - \frac{1}{2}\ \cos u\right]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$, proto

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sin \pi}_{0} - \frac{1}{2}\ \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \left(\underbrace{\sin 0}_{0} - \frac{1}{2}\ \underbrace{\cos 0}_{1} \right) \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3. Vypočítejte cirkulaci (křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou křivku):

$$\oint_\gamma \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\vec{i}-\frac{x-y}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\cdot d\vec{r}$$

kde **uzavřená** křivka γ je kladně orientovaná kružnice, se středem S=[0;0] a poloměrem $r=2$.

$/x \neq 0 \lor y \neq 0/$

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ, včetně prvních derivací:

$x = 2\cos t \qquad x' = -2\sin t$

$y = 2\sin t \qquad y' = 2\cos t$

$t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$

$$\oint_\gamma \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\vec{i}-\frac{x-y}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{2\cos t+2\sin t}{(2\cos t)^2+(2\sin t)^2}\vec{i}-\frac{2\cos t-2\sin t}{4(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1})}\vec{j}\right]\cdot(-2\sin t\,\vec{i}+2\cos t\,\vec{j})\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{(2\cos t+2\sin t)\cdot(-2\sin t)}{4}-\frac{(2\cos t-2\sin t)\cdot(2\cos t)}{4}\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\cos t\sin t\underbrace{-\sin^2 t-\cos^2 t}_{-1}+\sin t\cos t)dt = -\int_0^{2\pi}dt = -\left[t\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto $= -(2\pi-0) = \underline{\underline{-2\pi}}$

4. Vypočítejte křivkový integrál ve vektorovém poli:

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \left[\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\vec{i}+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\vec{j}\right]\cdot d\vec{r}$$

, kde křivka γ je úsečka začínající v bodě $A=[1\,;\pi]$ a končící v bodě $B=[2\,;\pi]$.

$/x \neq 0;\ y \in \mathbb{R}/$

Napíšeme parametrické rovnice úsečky γ , rovnoběžné s osou x :

$x = t \qquad x' = 1$

$y = \pi \qquad y' = 0$

$t \in \langle 1\,;\,2\rangle$

$$\mathcal{I} = \int_1^2\left[\left(1-\frac{\pi^2}{t^2}\cos\frac{\pi}{t}\right)\vec{i}+\left(\sin\frac{\pi}{t}+\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}\right)\vec{j}\right]\cdot(1\,\vec{i}+0\,\vec{j})\,dt =$$

$$= \int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{t^2}\cos\frac{\pi}{t}\right)dt = \left|\begin{array}{l|c|c} \frac{\pi}{t}=w & t & w \\ -\frac{\pi}{t^2}dt = dw & 2 & \frac{\pi}{2} \\ dt = -\frac{t^2}{\pi}dw & 1 & \pi \end{array}\right| = \int_1^2 dt - \int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi^2}{t^2}\cos w\cdot\frac{-t^2}{\pi}dw =$$

$$= \int_1^2 dt + \pi\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos w\,dw = \left[t\right]_1^2+\pi\left[\sin w\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 1\,;\,2\rangle, w \in \left\langle\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right\rangle$ proto

$$= (2-1)+\pi\cdot(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\sin\pi}_{0}) = \underline{\underline{1+\pi}}$$

5. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int_\gamma (\vec{i} + x\,\vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ ,$$ kde křivka $\gamma : y = x^2$ začíná v bodě $[1\,;?]$ a končí v bodě $[2\,;?]$.

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}$/

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ :

$$x = t \qquad x' = 1$$
$$y = t^2 \qquad y' = 2t$$
$$t \in \langle 1\,;\,2\rangle$$

$$\int_\gamma (\vec{i} + x\,\vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 (1\,\vec{i} + t\,\vec{j}) \cdot (1\,\vec{i} + 2t\,\vec{j})\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (1 + 2t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + 2\frac{t^3}{3}\right]_1^2 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, ...

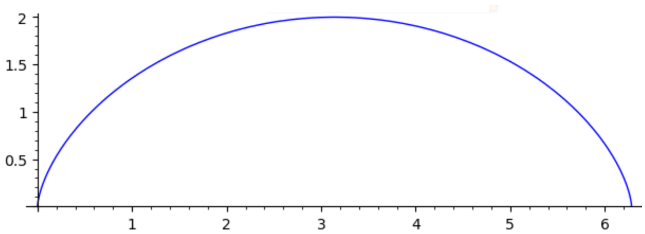
$$= \left(2 + 2\frac{2^3}{3}\right) - \left(1 + 2\frac{1^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{17}{3}}}$$

6. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int_\gamma [(2-y)\vec{i} - (1-y)\vec{j}] \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ ,$$ kde křivka γ :

$$x = t - \sin t \qquad x' = 1 - \cos t$$
$$y = 1 - \cos t \qquad y' = \sin t$$
$$t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$$

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}$/



$$\int_\gamma [(2-y)\vec{i} - (1-y)\vec{j}] \cdot \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{[2 - (1-\cos t)]\,\vec{i} - [1 - (1 - \cos t)]\,\vec{j}\} \cdot [(1-\cos t)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}\,]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1+\cos t)\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}\,] \cdot [(1-\cos t)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}\,]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ \hline 1 + \cos 2t &= 2\cos^2 t \end{aligned} \implies \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\left|\begin{array}{c} 2t = w \\ 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}w \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}w}{2} \\ t \mid w \\ \hline 2\pi \mid 4\pi \\ 0 \mid 0 \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2\cos t \sin t}_{\sin 2t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} (1 - \cos w - \sin w)\frac{\mathrm{d}w}{2} = \frac{1}{4}\Big[w - \sin w + \cos w\Big]_0^{4\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $w \in \mathbb{R}$, tedy i pro $w \in \langle 0\,;\,4\pi\rangle$, proto

$$= \frac{1}{4}\Big[(4\pi - \underbrace{\sin 4\pi}_{0} + \underbrace{\cos 4\pi}_{1}) - (0 - \underbrace{\sin 0}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1})\Big] = \underline{\underline{\pi}}$$

7. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int\limits_{\gamma} (xy\,\vec{i} + (y-x)\,\vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ ,$$ kde křivka $\gamma : y = x^3$ začíná v bodě $[0\,;?]$ a končí v bodě $[1\,;?]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ :

$$\begin{array}{ll} x = t & x' = 1 \\ y = t^3 & y' = 3t^2 \\ \multicolumn{2}{c}{t \in \langle 0\,;\,1 \rangle} \end{array}$$

$$\int\limits_{\gamma} (xy\,\vec{i} + (y-x)\,\vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_0^1 (t \cdot t^3\,\vec{i} + (t^3 - t)\,\vec{j}) \cdot (1\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j})\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (t^4 + 3t^5 - 3t^3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$ primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, ... $$= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - (0) = \underline{\underline{\frac{-1}{20}}}$$

8. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\gamma} \left[x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (x+y-1)\,\vec{k}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ ,$$ kde křivka γ je úsečka začínající v bodě $A = [1\,;1\,;1]$ a končící v bodě $B = [2\,;3\,;4]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Napíšeme parametrické rovnice úsečky γ :

$$\begin{array}{ll} x = 1 + t & x' = 1 \\ y = 1 + 2t & y' = 2 \\ z = 1 + 3t & z' = 3 \\ \multicolumn{2}{c}{t \in \langle 0\,;\,1 \rangle} \end{array}$$

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^1 \left\{(1+t)\,\vec{i} + (1+2t)\,\vec{j} + [(1+t) + (1+2t) - 1]\,\vec{k}\right\} \cdot (1\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 [(1+t) + (2+4t) + (3+9t)]\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (6 + 14t)\ \mathrm{d}t = \left[6t + \frac{14t^2}{2}\right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,1 \rangle$, proto

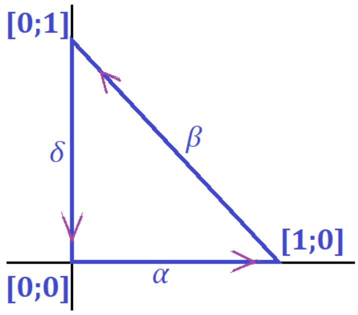
$$= \left(6 + \frac{14}{2}\right) - (0) = \underline{\underline{13}}$$

9. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma} \left[(x^2 + y^2)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\,\vec{j} \right] \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ je kladně orientovaný obvod ΔABC o vrcholech $A = [0\,;0]$, $B = [1\,;0]$, $C = [0\,;1]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$



Napíšeme parametrické rovnice

tří jednoduchých oblouků (složené) křivky γ (tedy tří stran trojúhelníka): $\gamma = \alpha \cup \beta \cup \delta$

α		β		δ	
$x = t$	$x' = 1$	$x = 1 - t$	$x' = -1$	$x = 0$	$x' = 0$
$y = 0$	$y' = 0$	$y = t$	$y' = 1$	$y = 1 - t$	$y' = -1$
$t \in \langle 0\,;\,1 \rangle$		$t \in \langle 0\,;\,1 \rangle$		$t \in \langle 0\,;\,1 \rangle$	

$$\mathcal{I} = \int_{\alpha} \left[(x^2 + y^2)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\,\vec{j} \right] . \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\beta} \left[(x^2 + y^2)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\,\vec{j} \right] . \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\delta} \left[(x^2 + y^2)\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\,\vec{j} \right] . \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_0^1 \left\{ (t^2 + 0^2)\,\vec{i} + (t^2 - 0^2)\,\vec{j} \right\} \cdot (1\,\vec{i} + 0\,\vec{j})\,\mathrm{d}t \, +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \left[(1-t)^2 + t^2 \right] \vec{i} + \left[(1-t)^2 - t^2 \right] \vec{j} \right\} \cdot (-1\,\vec{i} + 1\,\vec{j})\,\mathrm{d}t \, +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \left[0^2 + (1-t)^2 \right] \vec{i} + \left[0^2 - (1-t)^2 \right] \vec{j} \right\} \cdot (0\,\vec{i} - 1\,\vec{j})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \left[(1 - 2t + t^2 + t^2)\,\vec{i} + (1 - 2t + t^2 - t^2)\,\vec{j} \right] \cdot (-1\,\vec{i} + 1\,\vec{j})\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (-1 + 2t - 2t^2 + 1 - 2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - 2t + t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-2t + 1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2t^2}{2} + t \right]_0^1 =$$

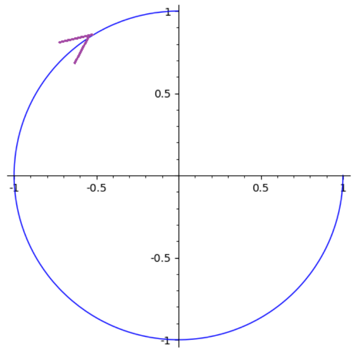
primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,1 \rangle$, proto

$$= (-1 + 1) - (0) = \underline{\underline{0}}$$

10. Vypočtěte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (3x^2 + 2y^2)\,\vec{i} + (4xy - 3y^2)\,\vec{j}$ při přemístění hmotného bodu po oblouku kružnice $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1; ?]$ do bodu $[?; 1]$, když víte, že práce v tomto případě je určena vzorcem $A = \int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ $/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$

práce je působení síly po dráze

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ

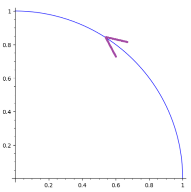


kladná orientace

$x = \cos t \quad x' = -\sin t$

$y = \sin t \quad y' = \cos t$

$t \in \left\langle 0\,;\ \frac{\pi}{2} \right\rangle$



záporná orient.

$x = \sin t \quad x' = \cos t$

$y = \cos t \quad y' = -\sin t$

$t \in \left\langle \frac{\pi}{2}\,;\ 2\pi \right\rangle$

$$A_{\mathrm{kl}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3\cos^2 t + 2\sin^2 t)\,\vec{i} + (4\cos t \sin t - 3\sin^2 t)\,\vec{j}\right] \cdot \left[(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-3\cos^2 t \sin t - 2\sin^3 t) + (4\cos^2 t \sin t - 3\sin^2 t \cos t)\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \sin t - 2\sin^3 t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{array}{cc} \cos t = u & \sin t = v \\ -\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u & \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v \\ \frac{\pi}{2} = 0 & \frac{\pi}{2} = 1 \\ 0 = 1 & 0 = 0 \end{array}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos^2 + 2(1 - \cos^2 t)](-\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^0 (-u^2 + 2 - 2u^2)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 3v^2\,\mathrm{d}v = \left[2u - \frac{3u^3}{3}\right]_1^0 - \left[\frac{3v^3}{3}\right]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle 0\,;\ 1\rangle, v \in \langle 0\,;\ 1\rangle$, proto

$$= [(0) - (2 - 1)] - [1 - 0] = \underline{\underline{-2}}$$

$$A_{\mathrm{záp}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left[(3\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,\vec{i} + (4\sin t \cos t - 3\cos^2 t)\,\vec{j}\right] \cdot \left[(\cos t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j})\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3\sin^2 t \cos t + 2\cos^3 t) + (-4\sin t \cos^2 t + 3\cos^3 t)\right] \mathrm{d}t = \quad \ldots \quad = \underline{\underline{-2}}$$