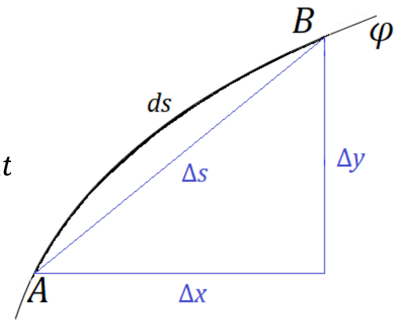
Jsou-li splněny podmínky **Věty 2.2.** [1] , tedy že

- oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi: $x=\varphi(t)\,;\ y=\psi(t)\,;\ z=\chi(t)\,;\ t\in\langle\alpha\,;\beta\rangle$
- funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na oblouku γ

můžeme **křivkový integrál** funkce $f(x,y,z)$ přes oblouk γ nahradit určitým integrálem takto:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\ \mathrm{d}t$$



Pokud chybí souřadnice z, pak

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ \mathrm{d}t$$

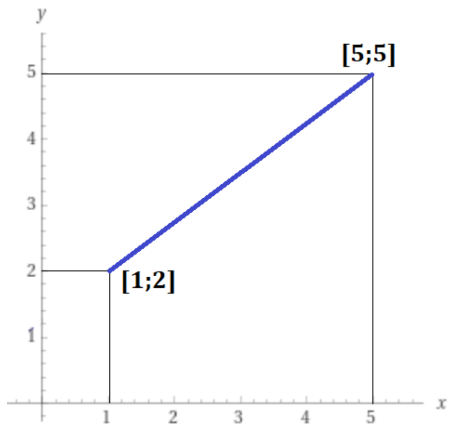
kde: $\Delta s\doteq\ ds=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=$

$$=\sqrt{\left(\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\mathrm{d}y\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2}\ =\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ \mathrm{d}t$$

1. Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu:

$\int_\gamma(5x-9y)\,\mathrm{d}s$, kde křivka γ je nejkratší spojnicí bodů o souřadnicích $[1\,;2]$ a $[5\,;5]$

/$x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R}$/ Nejkratší spojnicí je úsečka!



Napíšeme parametrické rovnice křivky γ

$x=1+4t$ $\quad x'=4$ $\quad$ směrový vektor

$y=2+3t$ $\quad y'=3$ $\quad \vec{s}=(4\,;\,3)$

$t\in\langle 0\,;\,1\rangle$

$$\int_\gamma(5x-9y)\,\mathrm{d}s=\int_0^1[5(1+4t)-9(2+3t)]\cdot\sqrt{4^2+3^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\int_0^1(7t+13)\sqrt{25}\,\mathrm{d}t=-5\left[7\frac{t^2}{2}+13t\right]_0^1=$$

primitivní funkce je spojitá pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$=-5\left[\left(\frac{7}{2}+13\right)-(0)\right]=\frac{-35-130}{2}=-\frac{165}{2}$$

[1] Strana 7 ve skriptech: Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

2. Vypočítejte křivkový integrál ve skalárním poli:

$$\int_{\gamma} \mathrm{d}s\ ,$$

kde křivka γ je částí křivky α, která leží mezi průsečíky křivky α se souřadnými osami a jejichž souřadnice vyhovují vztahům:

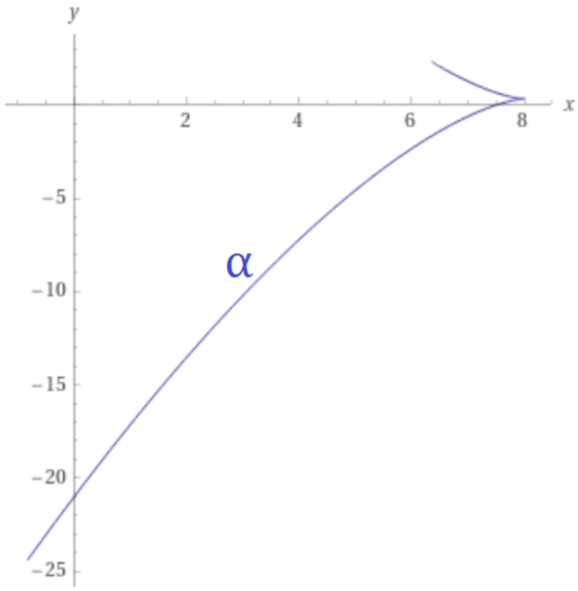
$$x = \frac{16 - t^2}{2}$$
$$y = \frac{1 + t^3}{3}$$
$$t \leq 3$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$ Vlastně počítáme délku oblouku.

Určíme **meze parametru** t jako průsečíky křivky α se souřadnými osami:

$$0 = \frac{16 - t^2}{2} \qquad 0 = \frac{1 + t^3}{3}$$
$$0 = 16 - t^2 \qquad 0 = 1 + t^3$$
$$t^2 = 16 \qquad -1 = t^3$$
$$t = \pm 4 \qquad -1 = t$$

$$t \in \langle -4\,;\,-1 \rangle$$



$$x = \frac{16 - t^2}{2} = 8 - \frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad x' = -t$$

$$y = \frac{1 + t^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3 \quad \Rightarrow \quad y' = t^2$$

$$\int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_{-4}^{-1} \sqrt{(-t)^2 + \left(t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2 + t^4}\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2(1 + t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-4}^{-1} |t| \cdot \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{-1} -(t) \cdot \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1 + t^2} = u \\ 1 + t^2 = u^2 \\ 2t\,\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}t = \frac{u}{t}\,\mathrm{d}u \\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline -1 & \sqrt{2} \\ -4 & \sqrt{17} \end{array} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} tu \cdot \frac{u}{t}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \left\langle \sqrt{2}\,;\,\sqrt{17} \right\rangle$, proto

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{17}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3}\right] = \underline{\underline{\frac{17 \cdot \sqrt{17} - 2 \cdot \sqrt{2}}{3}}}$$

3. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int\limits_{\gamma} (x + y^2 - z)\,\mathrm{d}s \ ,$$

kde křivka γ je úsečka AB, přičemž souřadnice bodů jsou: $A = [2\,;\, -1\,;\, 1]\,,\ B = [1\,;\, 3\,;\, 3]$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Napíšeme parametrické rovnice úsečky γ,

kde $\overrightarrow{AB} = (-1\,;\, 4\,;\, 2)$

$$\begin{aligned} x &= 2 - t & x' &= -1 \\ y &= -1 + 4t & y' &= 4 \\ z &= 1 + 2t & z' &= 2 \end{aligned}$$

$$t \in \langle 0\,;\, 1\rangle$$

$$\int\limits_{\gamma} (x + y^2 - z)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 \big[(2 - t) + (-1 + 4t)^2 - (1 + 2t)\big] \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{21}\int\limits_0^1 (2 - t + 1 - 8t + 16t^2 - 1 - 2t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{21}\int\limits_0^1 (16t^2 - 11t + 2)\,\mathrm{d}t =$$

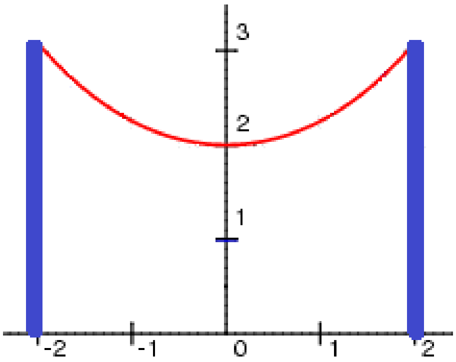
$$= \sqrt{21}\left[16\frac{t^3}{3} - 11\frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\, 1\rangle$, proto

$$= \sqrt{21}\left[16\frac{1}{3} - 11\frac{1}{2} + 2 - (0)\right] = \sqrt{21}\ \frac{32 - 33 + 12}{6} = \frac{11 \cdot \sqrt{21}}{6}$$

Délka (*míra*) křivky [2] γ : $L = \int\limits_{\gamma} \mathrm{d}s$

Mezi dvěma sloupy, vzdálenými od sebe 4 m, je zavěšené lano (křivka γ). Vlivem vlastní hmotnosti se lano prohne do tvaru křivky, která se nazývá *řetězovka*. Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu s osami x a y, kde osa x prochází patami sloupů a osa y je uprostřed mezi nimi. Určete délku prohnutého lana, jestliže v této souřadné soustavě je řetězovka popsána funkcí



$$y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

Protože $y(0) = 2$, je nejnižší bod lana 2 m nad zemí.

[2] Strana 9 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

Napíšeme parametrické rovnice (lana) křivky γ

$$x = t \qquad x' = 1 \qquad\qquad x = 2r \qquad x' = 2$$

$$y = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \qquad y' = e^{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{nebo} \qquad y = e^r + e^{-r} \qquad y' = e^r - e^{-r}$$

$$t \in \langle -2\,;\, 2\rangle \qquad\qquad r \in \langle -1\,;\, 1\rangle$$

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-2}^{2} \sqrt{1^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^t - 2 + e^{-t}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^t + 2 + e^{-t}\right)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \left|e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{\frac{t}{2}=u}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{-\frac{t}{2}=v}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2e^{\frac{t}{2}}\right]_{-2}^{2} + \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_{-2}^{2} =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle -2\,;\, 2\rangle$, proto

$$= \left(e^1 - e^{-1}\right) - \left(e^{-1} - e^1\right) = \underline{\underline{2e - \frac{2}{e}}}$$

Nebo

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \sqrt{2^2 + \left(e^r - e^{-r}\right)^2}\,\mathrm{d}r = \int_{-1}^{1} \sqrt{4 + e^{2r} - 2\underbrace{e^{r-r}}_{1} + e^{-2r}}\,\mathrm{d}r = \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(e^r + e^{-r}\right)^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|e^r + e^{-r}\right|\,\mathrm{d}r = \int_{-1}^{1} e^r\,\mathrm{d}r + \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{-r}}_{-r=w}\,\mathrm{d}r = \left[e^r\right]_{-1}^{1} + \left[-e^{-r}\right]_{-1}^{1} = \qquad \ldots \qquad = \underline{\underline{2e - \frac{2}{e}}}$$

Obsah P části válcové plochy Φ [3]

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s$$

s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$,
tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými
plochami $z = g(x,y)$, $z = f(x,y)$, $g(x,y) \le f(x,y)$ $\forall [x,y] \in \gamma$

Když například pro souřadnice všech bodů válcové plochy platí:

$$x = 2\cos t \qquad y = 2\sin t \qquad t \in \langle 0\,;\, 2\pi\rangle \qquad 0 \le z \le 3$$

tedy $g(x,y) = 0$, $f(x,y) = 3$ a počítáme plošný obsah válcové plochy, která má poloměr 2 a je vysoká 3. Podle vzorce počítáme obsah **pláště válce** $\Longrightarrow$ $P = 2\pi r v = 2\pi\cdot 2\cdot 3 = 12\pi$

Ověříme si správnost úvahy:

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} [3 - 0]\cdot\sqrt{[2(-\sin t)]^2 + (2\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cdot\underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}_{1}}\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 6\left[t\right]_0^{2\pi} = \qquad \ldots \qquad 6\cdot(2\pi - 0) = \underline{\underline{12\pi}}$$

---

[3] Strana 9 ve skriptech: Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

Vypočtěte plošný obsah P rotační válcové plochy

dané rovnicemi $\quad x = 2\cos t \quad x' = -2\sin t \quad$ a omezené plochami $\quad 0 \le z \le 2 + \sqrt{4 - x^2}$

$\quad y = 2\sin t \quad y' = 2\cos t$

$$t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$$

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left[\left(2 + \sqrt{4 - x^2}\right) - 0\right] \cdot \sqrt{[2(-\sin t)]^2 + (2\cos t)^2}\;\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2 + \sqrt{4 - (2\cos t)^2}\right] \cdot \sqrt{4 \cdot (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})}\;\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{4}\;\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot (\underbrace{1 - \cos^2 t}_{\sin^2 t})} \cdot \sqrt{4}\;\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + 4\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + 4\int_0^{\pi} (\sin t)\,\mathrm{d}t + 4\int_\pi^{2\pi} (-\sin t)\,\mathrm{d}t =$$

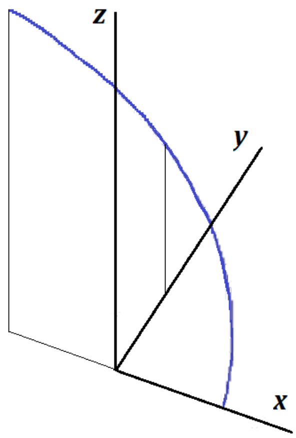
$$= 4\Big[t\Big]_0^{2\pi} + 4\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} + 4\Big[\cos t\Big]_\pi^{2\pi} =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$, proto

$$= 4 \cdot (2\pi - 0) + 4 \cdot [-\underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})] + 4 \cdot (\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\cos \pi}_{-1}) = \underline{\underline{8\pi + 16}}$$

Hmotnost křivky[4] $\gamma:\ m = \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

kde $\varrho(x,y,z)$ je měrná hmotnost/specifická **hustota** (lana, řetězu, kabelu, ...) ve tvaru křivky γ.



Určete hmotnost homogenního $\quad (\varrho(x,y,z) = konst.)$ oblouku (jednoho **půl**závitu) šroubovice dané parametricky:

$x = \cos t \qquad x' = -\sin t$

$y = \sin t \qquad y' = \cos t$

$z = t \qquad z' = 1$

$$t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$$

$$m = \int_\gamma \varrho\,\mathrm{d}s = \varrho \int_0^{\pi} \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1} + (1)^2}\;\mathrm{d}t = \varrho\sqrt{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \varrho\sqrt{2}\,\Big[t\Big]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$, proto $\quad = \varrho\sqrt{2}\,(\pi - 0) = \underline{\underline{\varrho\sqrt{2}\,\pi}}$

[4] Strana 10 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

Těžiště hmotné křivky [5] γ , kde $\varrho(x,y,z)$ je měrná hmotnost/specifická **hustota**

rovinná křivka: $T = \left[\frac{S_y}{m}\,;\,\frac{S_x}{m}\right] = \left[\frac{\int_\gamma x\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{ds}}{\int_\gamma \varrho(x,y)\,\mathrm{ds}}\,;\,\frac{\int_\gamma y\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{ds}}{\int_\gamma \varrho(x,y)\,\mathrm{ds}}\right]$

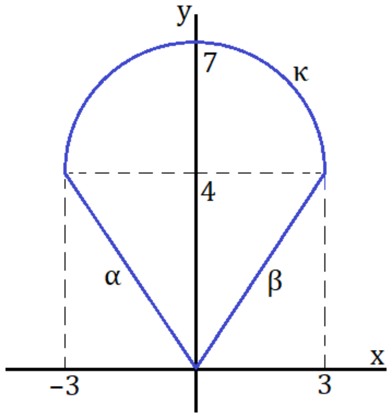
prostorová: $T = \left[\frac{S_{yz}}{m}\,;\,\frac{S_{xz}}{m}\,;\,\frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{\int_\gamma x\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}{\int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}\,;\,\frac{\int_\gamma y\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}{\int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}\,;\,\frac{\int_\gamma z\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}{\int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{ds}}\right]$

kde

- S_x, S_y jsou statické momenty hmotné křivky γ vzhledem k souřadnicovým osám;
- S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} jsou statické momenty křivky γ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

Těžiště rovinné hmotné křivky

Určete těžiště kostry draka, která je vyrobena z drátu tenkého průřezu o měrné hustotě $\varrho(x,y) = 2$. Rozměry kostry jsou na vedlejším obrázku



Protože je kostra draka symetrická vzhledem k ose y je statický moment S_y vzhledem k této ose roven nule. Sami se následujícím výpočtem přesvědčte, že

$$S_y = \int_\gamma x\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{ds} = 0$$

Tedy x-ová souřadnice těžiště je také nula: $T = [0\,;y_T]$. Zbývá určit y-ovou souřadnici těžiště.

Křivka γ je složena ze tří jednodušších křivek: $\gamma = \alpha\cup\beta\cup\kappa$,

proto například hmotnost určíme:

$$m = \int_\gamma \varrho(x,y)\,\mathrm{ds} = \int_\alpha \varrho(x,y)\,\mathrm{ds} + \int_\beta \varrho(x,y)\,\mathrm{ds} + \int_\kappa \varrho(x,y)\,\mathrm{ds} = 2\int_\alpha \mathrm{ds} + 2\int_\beta \mathrm{ds} + 2\int_\kappa \mathrm{ds}$$

kde

α je úsečka s krajními body $[-3\,;\,4]$, $[0\,;\,0]$

β je úsečka s krajními body $[0\,;\,0]$, $[3\,;\,4]$

κ je horní polokružnice se středem $[0\,;\,4]$ a poloměrem $r = 3$

[5] Strana 11 ve skriptech: Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

Jednotlivé křivky vyjádříme parametricky:

α		β		κ	
$x = -3t$	$x' = -3$	$x = 3t$	$x' = 3$	$x = 3\cos t$	$x' = -3\sin t$
$y = 4t$	$y' = 4$	$y = 4t$	$y' = 4$	$y = 4 + 3\sin t$	$y' = 3\cos t$
$t \in \langle 0\,;\,1\rangle$		$t \in \langle 0\,;\,1\rangle$		$t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$	

Potom hmotnost kostry draka je:

$$m = 2\int_\alpha \mathrm{d}s + 2\int_\beta \mathrm{d}s + 2\int_\kappa \mathrm{d}s =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{(-3)^2+4^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \sqrt{3^2+4^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^\pi \sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(2\int_0^1 \sqrt{25}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 \sqrt{25}\,\mathrm{d}t\right) + 2\int_0^\pi \sqrt{9\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}}\,\mathrm{d}t = 4\cdot 5\int_0^1 \mathrm{d}t + 2\cdot 3\int_0^\pi \mathrm{d}t =$$

$$= 20\Big[t\Big]_0^1 + 6\Big[t\Big]_0^\pi =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,1\rangle$ nebo $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto

$$= 20\,(1-0) + 6\,(\pi-0) = \underline{\underline{20+6\pi}} \doteq 38{,}85$$

Statický moment S_x kostry draka vzhledem k ose x je:

$$m = 2\int_\alpha y\,\mathrm{d}s + 2\int_\beta y\,\mathrm{d}s + 2\int_\kappa y\,\mathrm{d}s =$$

$$= 2\int_0^1 4t\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 4t\cdot\sqrt{3^2+4^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^\pi (4+3\sin t)\cdot\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(8\int_0^1 t\cdot\sqrt{25}\,\mathrm{d}t + 8\int_0^1 t\cdot\sqrt{25}\,\mathrm{d}t\right) + 2\int_0^\pi (4+3\sin t)\cdot\sqrt{9\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}}\,\mathrm{d}t =$$

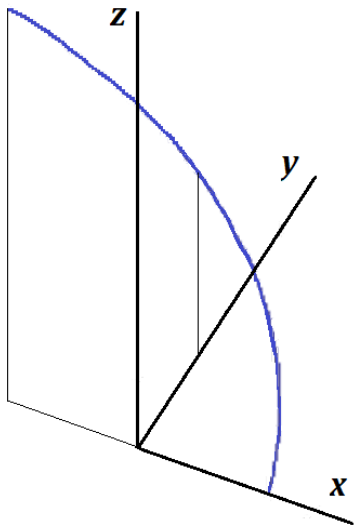
$$= 2\cdot 8\cdot 5\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + 2\cdot 3\int_0^\pi (4+3\sin t)\,\mathrm{d}t = 80\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 6\Big[4t - 3\cos t\Big]_0^\pi =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,1\rangle$ nebo $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto

$$= 80\left(\frac{1}{2}-0\right) + 6\left[(4\pi - 3\underbrace{\cos\pi}_{-1}) - (0 - 3\underbrace{\cos 0}_{1})\right] = 40 + 24\pi + 36 = \underline{\underline{76+24\pi}} \doteq 151{,}4$$

$\frac{76+24\pi}{20+6\pi} \doteq 3{,}9 \quad \Longrightarrow \quad$ Těžiště draka má (přibližně) souřadnice: $\underline{\underline{T = [0\,;\,3{,}9]}}$.

Těžiště prostorové hmotné křivky



Určete polohu těžiště homogenního $(\varrho(x, y, z) = konst.)$ oblouku (jednoho **půl**závitu) šroubovice dané parametricky:

$$x = \cos t \qquad x' = -\sin t$$
$$y = \sin t \qquad y' = \cos t$$
$$z = t \qquad z' = 1$$
$$t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$$

jestliže měrná hustota materiálu šroubovice je: $\varrho(x, y, z) = 4$

$$m = \int_\gamma \underbrace{4}_{\varrho}\, \mathrm{d}s = 4\int_0^\pi \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{1} + (1)^2}\, \mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 4.\sqrt{2}\, \big[t\big]_0^\pi = \qquad /\, \mathrm{d}s = \sqrt{2}\, \mathrm{d}t /$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto $= 4 \cdot \sqrt{2}\,(\pi - 0) = \underline{\underline{4\pi\sqrt{2}}}$

$$S_{yz} = \int_\gamma x \cdot \underbrace{4}_{\varrho}\, \mathrm{d}s = 4\int_0^\pi \cos t \cdot \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\int_0^\pi \cos t\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\,\big[\sin t\big]_0^\pi =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto $= 4.\sqrt{2}(\underbrace{\sin \pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}) = \underline{\underline{0}}$

$$S_{xz} = \int_\gamma y \cdot \underbrace{4}_{\varrho}\, \mathrm{d}s = 4\int_0^\pi \sin t \cdot \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\int_0^\pi \sin t\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\,\big[-\cos t\big]_0^\pi =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto

$$= 4 \cdot \sqrt{2}\left[(-\underbrace{\cos \pi}_{-1}) - (-\underbrace{\cos 0}_{1})\right] = \underline{\underline{8 \cdot \sqrt{2}}}$$

$$S_{xy} = \int_\gamma z \cdot \underbrace{4}_{\varrho}\, \mathrm{d}s = 4\int_0^\pi t \cdot \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\int_0^\pi t\, \mathrm{d}t = 4 \cdot \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto $= 2 \cdot \sqrt{2}(\pi^2 - 0) = \underline{\underline{2\pi^2\sqrt{2}}}$

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}\,;\,\frac{S_{xz}}{m}\,;\,\frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{0}{4\pi\sqrt{2}}\,;\,\frac{8 \cdot \sqrt{2}}{4\pi\sqrt{2}}\,;\,\frac{2\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{4\pi\sqrt{2}}\right] = \underline{\underline{\left[0\,;\,\frac{2}{\pi}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]}}$$