FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Lineární diferenciální rovnice

(obyčejné v reálném oboru)

Studijní materiály

Brno 2018

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplín jak v přírodních vědách tak v technických vědách jsou ***diferenciální rovnice***. **Obyčejná** diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí jedné proměnné (většinou označovanou $y(x)$ nebo jen y), jejími derivacemi a nezávislou proměnnou (většinou označovanou x). V nejjednodušší formě jste se s nimi setkali již u neurčitého integrálu, kdy jste vlastně řešili rovnici:

$$y' = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$$\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y = F(x) + c$$

S řešením diferenciálních rovnic jsou spjaty tyto základní otázky:

Existence — kdy má diferenciální rovnice řešení [1].

Jednoznačnost — kdy daným podmínkám vyhovuje právě jedno partikulární řešení.

Metody řešení — následně budeme probírat pouze některé typy diferenciálních rovnic.

---

[1] Touto (stejně jako i následující) otázkou se nebudeme zabývat vzhledem k tomu, že je probírána na přednáškách a v literatuře (např. Diblík, J., Přibyl, O.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno : VUT v Brně, Fakulta stavební, 150 s., 2004. ISBN 80–214–2795–7)

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu $y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Příklad 1. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 2y = x$ $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - 2y = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - 2y &= 0 \\
y' &= 2y && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x} \\
y &= c \cdot \mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$0 - 2 \cdot 0 = 0$ *řešíme* ***přidruženou homogenní*** *rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Ke stejnému výsledku bychom se dopracovali i pomocí charakteristické rovnice $\lambda - 2 = 0$, (protože zadaná rovnice má konstantní koeficienty) tak, jak bude ukázáno u rovnic vyššího řádu. Stejně tak bychom také mohli odhadnout partikulární řešení nehomogenní rovnice $y_P = ax + b$ a postupovat metodou neurčitých koeficientů (protože jde o rovnici se speciální pravou stranou) jak také bude ukázáno u rovnic vyššího řádu, ale my použijeme obecnější postup.

2. Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x}$ konstantu c nahradíme vhodnou funkcí $K(x)$

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \\ y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} \left[K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right] - 2\left[K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right] &= x \\ K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} &= x \\ K'(x) &= x\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$K(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c$$

$$\begin{aligned} K(x) &= -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c \\ y &= \left(-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c\right)\mathrm{e}^{2x} \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c\mathrm{e}^{2x} = \underbrace{c\mathrm{e}^{2x}}_{y_H} \underbrace{-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 2y = x$

je funkce $f(x) : y = c\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — HOMOGENNÍ

Příklad 2.a Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' - 5y' + 6y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Pro připomenutí: kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Ovšem v tomto případě je určíme pomocí rozkladu $(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$
nebo podle vzorce

$$\lambda_{1;2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

Tedy

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{3x}$$
$$\lambda_2 = 2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{2x}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}$

Příklad 2.b Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda + 1)^3 = 0$

$$\lambda_1 = -1 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-1x}$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-1x}$$
$$\lambda_3 = -1 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{-1x}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2x\mathrm{e}^{-x} + c_3x^2\mathrm{e}^{-x}$

nebo

$$y_H = (c_1 + c_2x + c_3x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.c Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} - y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 - 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda^2 - 1) \cdot (\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\quad y_1 = \mathrm{e}^{1x}$

$\lambda_2 = -1$ $\quad y_2 = \mathrm{e}^{-1x}$

$\lambda_{3;4} = \pm i$ $\quad y_{3;4} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x}$

$y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$

$y_4 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$$\lambda_{1;2} = \pm i \qquad y_{1;2} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x}$$

$$y_1 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

$$\lambda_{3;4} = \pm i \qquad y_{3;4} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x}$$

$$y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$

$$y_4 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.HS Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(5)}-4y^{(4)}+2y'''+10y''-7y'-10y=0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^5-4\lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2-7\lambda-10=0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm1; \pm2; \pm5; \pm10$. Zda jsou to kořeny ověříme pomocí Hornerova sch.

HS	1	-4	2	10	-7	-10
1	1	-3	-1	9	2	-8
-1	1	-5	7	3	-10	0

$\lambda_1=-1$

$$(\lambda^5-4\lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2-7\lambda-10)=(\lambda+1)(\lambda^4-5\lambda^3+7\lambda^2+3\lambda-10)$$

HS	1	-5	7	3	-10
-1	1	-6	13	-10	0

$\lambda_2=-1$

$$(\lambda^5-4\lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2-7\lambda-10)=(\lambda+1)^2(\lambda^3-6\lambda^2+13\lambda-10)$$

HS	1	-6	13	-10
-1	1	-7	20	-30
2	1	-4	5	0
	a	b	c	

$\lambda_3=2$

$$(\lambda^5-4\lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2-7\lambda-10)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+5)$$

$$\lambda_{4;5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-1x}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-1x}$$

$$\lambda_3 = 2 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{2x}$$

$$\lambda_{4;5} = 2 \pm i \qquad y_{4;5} = \mathrm{e}^{(2 \pm 1.i)x}$$

$$y_4 = \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos 1x$$

$$y_5 = \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 1x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{2x} + c_4\mathrm{e}^{2x}\sin x + c_5\mathrm{e}^{2x}\cos x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.e Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' - y' = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 - \lambda = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\lambda_2 = 1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{1x}$$
$$\lambda_3 = -1 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{-1x}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.f Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' - y'' = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\lambda_2 = 0 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{0x}$$
$$\lambda_3 = 1 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{1x}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^x \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.g Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + y' = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 + \lambda = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\lambda_{2;3} = \pm i \qquad y_{2;3} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x}$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$

$$y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.h Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda^3 \cdot (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda^3 \cdot (\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\lambda_2 = 0 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{0x}$$
$$\lambda_3 = 0 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{0x}$$
$$\lambda_{4;5} = \pm i \qquad y_{4;5} = \mathrm{e}^{(0\pm 1.i)x}$$
$$y_4 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$
$$y_5 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$
$$\lambda_{6;7} = \pm i \qquad y_{6;7} = \mathrm{e}^{(0\pm 1.i)x}$$
$$y_6 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$
$$y_7 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + c_6 x \cos x + c_7 x \sin x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2. HS2 Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} - y''' - 7y'' + y' + 6y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 - \lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Zda jsou to kořeny ověříme pomocí Hornerova sch.

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

$\lambda_1 = 1$ $\quad (\lambda^4 - \lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 7\lambda - 6)$

HS	1	0	−7	−6
1	1	−6	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

$\lambda_2 = -1$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) =$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad y_1 = \mathrm{e}^{1x}$

$\lambda_2 = -1$ $\quad y_2 = \mathrm{e}^{-1x}$

$\lambda_3 = -2$ $\quad y_3 = \mathrm{e}^{-2x}$

$\lambda_4 = 3$ $\quad y_4 = \mathrm{e}^{3x}$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{-2x} + c_4\mathrm{e}^{3x}$ $\quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Příklad 2. HS3 Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $2y''' - 7y'' + y' + 10y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $2\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 10 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{5}{2}$.

Zda jde skutečně o kořeny si ověříme pomocí Hornerova schematu.

HS	2	−7	1	10
1	2	−5	−4	6
−1	2	−9	10	0

$\lambda_1 = -1$ $\quad (2\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 10) = (\lambda + 1)(2\lambda^2 - 9\lambda + 10)$

$$\lambda_{2;3} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4\cdot 2\cdot 10}}{2\cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \begin{cases} \lambda_2 = \frac{10}{4} \\ \lambda_3 = \frac{8}{4} \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-x}$

$\lambda_2 = \frac{5}{2} \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$

$\lambda_3 = 2 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{2x}$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-1x} + c_2\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} + c_3\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — SPECIÁLNÍ PRAVÁ STRANA

Příklad 3.a Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' + 4y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda_{1;2} = \pm 2i \qquad y_{1;2} = \mathrm{e}^{(0 \pm 2.i)x}$$

$$y_1 = \sin 2x$$
$$y_2 = \cos 2x$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

4. Odhadnuté partikulární řešení $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \quad = \underbrace{1}_{a} \mathrm{e}^{1x} \cos 2x$

$\Rightarrow \quad y_P = (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^k$, kde k je násobnost kořene $1 \pm 2\,\mathrm{i}$ v charakteristické rovnici. V našem případě není $1 \pm 2\,\mathrm{i}$ kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}
y_P &= (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^0 \\
y_P &= a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x \\
y_P &= \mathrm{e}^x(a \cos 2x + b \sin 2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_P' &= \mathrm{e}^x(a \cos 2x + b \sin 2x) + \mathrm{e}^x(-a \sin 2x \cdot 2 + b \cos 2x \cdot 2) \\
y_P' &= \mathrm{e}^x[(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x] \\
y_P'' &= \mathrm{e}^x[(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x] + \mathrm{e}^x[-(a + 2b) \sin 2x \cdot 2 + (b - 2a) \cos 2x \cdot 2] \\
y_P'' &= \mathrm{e}^x[(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]
\end{aligned}$$

A po dosazení

$$\{\mathrm{e}^x[(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]\} + 4\mathrm{e}^x(a \cos 2x + b \sin 2x) = \mathrm{e}^x \cos 2x \qquad | : \mathrm{e}^x$$

$$(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x + 4a \cos 2x + 4b \sin 2x = \cos 2x$$

$$(a + 4b) \cos 2x + (b - 4a) \sin 2x = \cos 2x$$

$$x = 0 : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos 0}_{1} + (b - 4a) \underbrace{\sin 0}_{0} = \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$x = \frac{\pi}{4} : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + (b - 4a) \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0}$$

$$\begin{aligned} a + 4b &= 1 \\ b - 4a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 4b &= 1 \quad |.4 \\ -4a + b &= 0 \end{aligned}$$

$$17b = 4$$

$$\underline{||\, b} = \frac{4}{17}$$

$$a + 4\frac{4}{17} = 1$$

$$\underline{||\, a} = \frac{1}{17}$$

$$y_P = a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x = \frac{1}{17}\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\mathrm{e}^x \sin 2x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4 \sin 2x)$$

$$y' = c_1 \cos 2x \cdot 2 - c_2 \sin 2x \cdot 2 + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4 \sin 2x) + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(- \sin 2x \cdot 2 + 4 \cos 2x \cdot 2)$$

6. Partikulární řešení vyhovující podmínkám: $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$$y(0) = 1: \quad 1 = c_1 \underbrace{\sin 0}_{0} + c_2 \underbrace{\cos 0}_{1} + \frac{1}{17} \underbrace{e^0}_{1} (\underbrace{\cos 0}_{1} + 4 \underbrace{\sin 0}_{0})$$

$$1 = c_2 + \frac{1}{17}$$

$$\underline{\| \, c_2} = \frac{16}{17}$$

$$y'(0) = 0: \quad 0 = c_1 \cos 0 \cdot 2 - c_2 \sin 0 \cdot 2 + \frac{e^0}{17} (\cos 0 + 4 \sin 0) + \frac{e^0}{17} (-\sin 0 \cdot 2 + 4 \cos 0 \cdot 2)$$

$$0 = 2c_1 + \frac{1}{17} + \frac{8}{17}$$

$$\underline{\| \, c_1} = -\frac{9}{34}$$

Hledané partikulární řešení je

$$y = -\frac{9}{34} \sin 2x + \frac{16}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} e^x \cos 2x + \frac{4}{17} e^x \sin 2x$$

Příklad 3.b

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y - 6\mathrm{e}^x = 0$

Řešení:

$$y'' + y' - 2y = 6\mathrm{e}^x$$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

má rozklad

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{1x}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** $\ldots = 6\,\mathrm{e}^x \cdot 1 \quad = \underbrace{6}_{a}\,\mathrm{e}^{1x}\cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_P = (a\mathrm{e}^{1x})x^k$, kde k je násobnost kořene $1 \pm 0\,\mathrm{i} = 1$ v charakteristické rovnici. V našem případě je 1 **jednonásobným** kořenem, proto $k = 1$. Tedy

$$y_P = (a\mathrm{e}^x)x^1$$

$$y_P = (a\,x) \cdot (\mathrm{e}^x)$$

$$\begin{aligned} y_P' &= a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x \\ y_P'' &= a\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

A po dosazení

$$\begin{aligned} (a\mathrm{e}^x + a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x) + (a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x) - 2(ax\mathrm{e}^x) - 6\mathrm{e}^x &= 0 \\ 3a\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x &= 0 \qquad |:\mathrm{e}^x \\ 3a &= 6 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P = 2x\mathrm{e}^x$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x} + 2x\mathrm{e}^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.c Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' - 5y = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' - 4y' - 5y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

má rozklad

$$(\lambda+1)\cdot(\lambda-5) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \qquad & y_1 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_2 &= 5 \qquad & y_2 &= \mathrm{e}^{5x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** $\ldots = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 1 \quad = (\underbrace{2}_{a}\,x + \underbrace{3}_{b})\,\mathrm{e}^{2x}\cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_P = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}x^k$, kde k je násobnost kořene $2 \pm 0\,\mathrm{i} \; = 2$ v charakteristické rovnici.
V našem případě není 2 kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$\begin{aligned} y_P &= (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}x^0 \\ y_P &= (ax+b)\cdot\mathrm{e}^{2x} \\ y_P' &= a\,\mathrm{e}^{2x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 = (2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_P'' &= 2a\,\mathrm{e}^{2x} + (2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 \end{aligned}$$

A po dosazení

$$\left[2a\,\mathrm{e}^{2x} + 2(2ax + a + 2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] - 4\left[(2ax + a + 2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] - 5\left[(ax + b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] = (2x + 3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad |: \mathrm{e}^{2x}$$

$$2a + 4ax + 2a + 4b - 8ax - 4a - 8b - 5ax - 5b = 2x + 3$$

$$-9ax - 9b = 2x + 3$$

$$x^1: \qquad -9a = 2$$

$$x^0: \qquad -9b = 3$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P = -\left(\frac{2}{9} \cdot x + \frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{2x}$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{5x} - \left(\frac{2}{9} \cdot x + \frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.d

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4y = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' - 4y' + 4y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

má rozklad

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{2x}$$
$$\lambda_2 = 2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{2x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** $\ldots = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 1 = (\underbrace{2}_{a}\,x + \underbrace{3}_{b})\,\mathrm{e}^{2x}\cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_P = (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot x^k$, kde k je násobnost kořene $2 \pm 0\,\mathrm{i} = 2$ v charakteristické rovnici.

V našem případě je 2 **dvojnásobným** kořenem, proto $k = 2$. Tedy

$$\begin{aligned}
y_P &= (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}x^2 \\
y_P &= (ax^3+bx^2)\cdot\mathrm{e}^{2x} \\
y_P' &= (3ax^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x} + (ax^3+bx^2)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 = (2ax^3+3ax^2+2bx^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x} \\
y_P'' &= (6ax^2+6ax+4bx+2b)\,\mathrm{e}^{2x} + (2ax^3+3ax^2+2bx^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 = \\
&= (4ax^3+12ax^2+4bx^2+6ax+8bx+2b)\,\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

A po dosazení

$$\left[(4ax^3 + 12ax^2 + 4bx^2 + 6ax + 8bx + 2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] -$$

$$-4\left[(2ax^3 + 3ax^2 + 2bx^2 + 2bx)\,\mathrm{e}^{2x}\right] + 4\left[(ax^3 + bx^2)\,\mathrm{e}^{2x}\right] = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad |:\mathrm{e}^{2x}$$

$$6ax + 2b = 2x + 3$$

$$x^1: \qquad 6a = 2$$

$$x^0: \qquad 2b = 3$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P = \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{2x} + \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$

nebo

$$y = \left(c_1 + c_2\,x + \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — PRAVÁ STRANA je složena ze SPECIÁLNÍch částí

Příklad 4. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda(\lambda + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \qquad y_1 &= \mathrm{e}^{0.x} = 1 \\ \lambda_2 &= -1 & \qquad y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & \qquad y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů.

$$y''' + 2y'' + y' = \underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{\sin x}_{2}$$

Protože pravá strana zadané rovnice je složena ze dvou speciálních částí, použijeme princip superpozice a odhadneme partikulární řešení pro každou část zvlášť.

4. Odhadnuté partikulární řešení $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$

Pro první část pravé strany: $\ldots = x^2 \cdot 1 \cdot 1 \quad = (\underbrace{1}_{a} x^2 + \underbrace{0}_{b} x + \underbrace{0}_{c}) \cdot \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_{P_1} = (ax^2 + bx + c)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 \pm 0\,\mathrm{i} = 0$ v chrakteristické rovnici.
V našem případě je 0 jednonásobným kořenem, proto $k = 1$. Tedy

$$y_{P_1} = (ax^2 + bx + c)x$$
$$y_{P_1} = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y'_{P_1} = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y''_{P_1} = 6ax + 2b$$
$$y'''_{P_1} = 6a$$

a po dosazení

$$(6a) + 2(6ax + 2b) + (3ax^2 + 2bx + c) = x^2$$
$$3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c = x^2$$
$$x^2 : \quad 3a = 1$$

$$\underline{||\, a} = \frac{1}{3}$$

$$x: \qquad 12a + 2b = 0$$

$$12 \cdot \frac{1}{3} + 2b = 0$$

$$2b = -4$$

$$\underline{||\, b} = -2$$

$$x^0: \qquad 6a + 4b + c = 0$$

$$6 \cdot \frac{1}{3} + 4(-2) + c = 0$$

$$2 - 8 + c = 0$$

$$\underline{||\, c} = 6$$

$$\underline{||\, y_{P_1}} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x$$

Pro druhou část pravé strany: ... $= 1 \cdot 1 \cdot \sin x$ $= \underbrace{1}_{a} \cdot \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$

$\Rightarrow$ $y_{P_2} = (a \sin x + b \cos x)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 \pm 1\,\mathrm{i} = \pm\mathrm{i}$ v chrakteristické rovnici. V našem případě není i kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$y_{P_2} = (a \sin x + b \cos x)x^0$$

$$y_{P_2} = a \sin x + b \cos x$$

$$\begin{aligned} y'_{P_2} &= a\cos x - b\sin x \\ y''_{P_2} &= -a\sin x - b\cos x \end{aligned}$$

a po dosazení $$y'''_{P_2} = -a\cos x + b\sin x$$

$$\begin{aligned} (-a\cos x + b\sin x) + 2(-a\sin x - b\cos x) + (a\cos x - b\sin x) &= \sin x \\ -2a\sin x - 2b\cos x &= \sin x \end{aligned}$$

$x = 0:$ $$-2a\underbrace{\sin 0}_{0} - 2b\underbrace{\cos 0}_{1} = \underbrace{\sin 0}_{0}$$

$$\begin{aligned} -2b &= 0 \\ \| \ b &= 0 \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{2}:$ $$-2a\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2b\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

$$\begin{aligned} -2a &= 1 \\ \| \ a &= -\frac{1}{2} \\ \| \ y_{P_2} &= -\frac{1}{2}\sin x \end{aligned}$$

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + c_3\,x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — METODA VARIACE KONSTANT

Příklad 5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad y_1 = \mathrm{e}^{1x}$$
$$\lambda_2 = 1 \quad y_2 = \mathrm{e}^{1x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné) a dosadíme do původní rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$y_H = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$$

$$y = K_1(x)\cdot[\mathrm{e}^x] + K_2(x)\cdot[x\mathrm{e}^x] = K_1\cdot(\mathrm{e}^x) + K_2\cdot(x\mathrm{e}^x)$$

$$y' = K_1'\cdot(\mathrm{e}^x) + K_1\cdot(\mathrm{e}^x)' + K_2'\cdot(x\mathrm{e}^x) + K_2\cdot(x\mathrm{e}^x)'$$

$$y' = K_1'\mathrm{e}^x + K_1\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x + K_2\cdot(1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$$

za podmínky: $K_1'\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x = 0$

$$y' = K_1\mathrm{e}^x + K_2(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$$

$$y'' = K_1'\mathrm{e}^x + K_1\mathrm{e}^x + K_2'(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + K_2[\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)]$$

A po dosazení:

$$[K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_1\mathrm{e}^x + K_2'(x\mathrm{e}^x)' + K_2(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)] - 2[K_1\mathrm{e}^x + K_2(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)] + [K_1\mathrm{e}^x + K_2x\mathrm{e}^x] = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' + K_1(\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x) + K_2(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

Formální sestavení systému:

$$\begin{aligned} K_1'\mathrm{e}^x \quad + \quad K_2'x\mathrm{e}^x \quad &= 0 \\ K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' &= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2' x\mathrm{e}^x = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_2'\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \quad |:\mathrm{e}^x$$

$$\underline{|| K_2'} = \frac{1}{x^2+1}$$

A po dosazení do první rovnice systému

$$K_1'\mathrm{e}^x + \frac{1}{x^2+1}x\mathrm{e}^x = 0 \quad |:\mathrm{e}^x$$

$$\underline{|| K_1'} = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$K_1 = -\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| -\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \right| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c_1 = \underline{-\ln\sqrt{x^2+1}+c_1}$$

$$K_2 = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \underline{\operatorname{arctg} x + c_2}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = (-\ln\sqrt{x^2+1} + c_1)\mathrm{e}^x + (\operatorname{arctg} x + c_2)x\mathrm{e}^x$

$$y = \underbrace{c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x}_{y_H} + \underbrace{\mathrm{e}^x(-\ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arctg} x)}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 5.b Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda(\lambda + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & y_1 &= \mathrm{e}^{0.x} = 1 \\ \lambda_2 &= -1 & y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů protože pravá strana je speciální.

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{array}{ccccccc}
K_1' & + & K_2' \mathrm{e}^{-x} & + & K_3' x\mathrm{e}^{-x} & = 0 \\
K_1'(1)' & + & K_2' \left(\mathrm{e}^{-x}\right)' & + & K_3' \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)' & = 0 \\
K_1' \left[(1)'\right]' & + & K_2' \left[\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' & + & K_3' \left[\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' & = x^2 \\
\hline
K_1' & + & K_2' \mathrm{e}^{-x} & + & K_3' x\mathrm{e}^{-x} & = 0 \\
0 & + & K_2'(-\mathrm{e}^{-x}) & + & K_3'(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) & = 0 \\
0 & + & K_2'(\mathrm{e}^{-x}) & + & K_3'(-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}) & = x^2 \\
\hline
 & & & & -K_3' \mathrm{e}^{-x} & = x^2 \\
 & & & & K_3' & = -\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}} = -x^2\mathrm{e}^x
\end{array} +$$

$$\underline{\| K_3} = \int -x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = -x^2 & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = -2x & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = -x^2\mathrm{e}^x - \int -2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 2x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2 & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2\mathrm{e}^x + \left(2x\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right) = -x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + c_3 = \underline{\mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3}$$

$$-K_2'\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) = 0$$

$$-K_2'\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x^3 = 0$$

$$\underline{\| K_2} = \int \underbrace{(x^3 - x^2)}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \,\mathrm{d}x = \quad \ldots \quad = \underline{\mathrm{e}^x(x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2}$$

$$K_1' + [(x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^x]\,\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)x\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$K_1' - x^2 = 0$$

$$\underline{\|\,K_1} = \int x^2\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{x^3}{3} + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + [\mathrm{e}^x(x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2]\mathrm{e}^{-x} + [\mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3]x\mathrm{e}^{-x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 8}_{y_P} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 6.c Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + y' = \cos^2 x$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1$$

$$\lambda_{2;3} = \pm i \qquad y_{2;3} = \mathrm{e}^{(0\pm 1.i)x}$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$

$$y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned}
K_1' \quad &+ \quad K_2' \cos x \quad + \quad K_3' \sin x &= 0 \\
K_1'(1)' \quad &+ \quad K_2' (\cos x)' \quad + \quad K_3' (\sin x)' &= 0 \\
K_1' \left[(1)'\right]' &+ K_2' \left[(\cos x)'\right]' + K_3' \left[(\sin x)'\right]' &= \cos^2 x
\end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$K_1' + K_2' \cos x + K_3' \sin x = 0 \tag{1}$$
$$0 + K_2'(-\sin x) + K_3'(\cos x) = 0 \tag{2}$$
$$0 + K_2'(-\cos x) + K_3'(-\sin x) = \cos^2 x \tag{3}$$

Vezmeme rovnice (2) a (3):

$$\begin{array}{ll} -K_2' \sin x + K_3' \cos x = 0 & | \cdot \cos x \\ -K_2' \cos x - K_3' \sin x = \cos^2 x & | \cdot (-\sin x) \\ \hline K_3' \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \cos^2 x \cdot (-\sin x) & \end{array}$$

$$\underline{|| \, K_3} = \int \cos^2 x \cdot \underbrace{(-\sin x)\, \mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ \underbrace{-\sin x\, \mathrm{d}x} = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^2\, \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c_3 = \underline{\frac{1}{3} \cos^3 x + c_3}$$

Opět vezmeme rovnice (2) a (3):

$$\begin{array}{ll} -K_2' \sin x + K_3' \cos x = 0 & | \cdot \sin x \\ -K_2' \cos x - K_3' \sin x = \cos^2 x & | \cdot \cos x \\ \hline -K_2' \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \cos^3 x & \end{array}$$

$$\underline{|| \, K_2} = \int -\cos^3 x\, \mathrm{d}x = \int -\cos^2 x \cdot \cos x\, \mathrm{d}x = \int (\sin^2 x - 1) \cdot \underbrace{\cos x\, \mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{c} \sin x = u \\ \underbrace{\cos x\, \mathrm{d}x} = \mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \int (u^2 - 1)\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} - u + c_2 = \underline{\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + c_2}$$

Nyní K_2' a K_3' dosadíme do rovnice (1):

$$K_1' + (-\cos^3 x)\cdot\cos x + (-\sin x\cdot\cos^2 x)\cdot\sin x = 0$$

$$K_1' - \cos^2 x(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) = 0$$

$$\underline{\|\,K_1} = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array}\right| = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos \underbrace{2x}_{v}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x} + c_1\right) + \left(\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + c_2\right)\cdot\cos x + \left(\frac{1}{3}\cos^3 x + c_3\right)\cdot\sin x$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x}_{y_H} + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 2x}_{y_P} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 7.d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 3y' + 2 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-1x}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$K_1'\,\mathrm{e}^{-x} + K_2'\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$$

$$K_1'\,(\mathrm{e}^{-x})' + K_2'\,(\mathrm{e}^{-2x})' = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$
\begin{aligned}
K_1' \,\mathrm{e}^{-x} \quad + \quad K_2' \,\mathrm{e}^{-2x} \quad &= 0 \\
K_1' \,\mathrm{e}^{-x}(-1) + \quad K_2' \left[\mathrm{e}^{-2x}(-2)\right] &= \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}
\end{aligned}
$$

$$
K_2' \left(-\mathrm{e}^{-2x}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \qquad | \cdot \left(-\mathrm{e}^{2x}\right)
$$

$$
K_2' = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}
$$

a po dosazení do první rovnice

$$
K_1' \,\mathrm{e}^{-x} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{e}^{-2x} = 0
$$

$$
K_1' = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}
$$

$$
\underline{||\, K_2} = \int -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}_{} = \left| \begin{array}{r} \mathrm{e}^x + 1 = t \\ \mathrm{e}^x = t - 1 \\ \underbrace{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}_{} = \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \qquad -1 + \tilde{c}_2 = c_2
$$

$$
= -\int \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -t + \ln|t| + c_2 = \underline{-\mathrm{e}^x - 1 + \ln(\mathrm{e}^x + 1) + \tilde{c}_2}
$$

$$\underline{\| K_1} = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \quad \left| \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \right| \quad = \underline{\ln(e^x+1)+c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = [\ln(e^x+1)+c_1]\ e^{-x} + [-e^x + \ln(e^x+1)+c_2]\ e^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{(e^{-x}+e^{-2x})\ \ln(e^x+1) - e^{-x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 8.e Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 4y' + 4y = x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x}$ $x \neq 0$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned} K_1'\,\mathrm{e}^{-2x} \quad &+ \quad K_2'\,x\,\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ K_1'\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)' &+ K_2'\left(x \cdot \mathrm{e}^{-2x}\right)' = x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{aligned} K_1' \, \mathrm{e}^{-2x} \quad + \quad K_2' \, x \, \mathrm{e}^{-2x} &= 0 \qquad | \cdot 2 \\ K_1' \, \mathrm{e}^{-2x}(-2) + K_2' \left[\mathrm{e}^{-2x} + x \cdot \mathrm{e}^{-2x}(-2)\right] &= x^{-3} \, \mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2' \, \mathrm{e}^{-2x} &= x^{-3} \, \mathrm{e}^{-2x} \qquad | \cdot \left(\mathrm{e}^{2x}\right) \\ K_2' &= x^{-3} \end{aligned}$$

a po dosazení do první rovnice

$$K_1' = -x^{-2}$$

$$\underline{|| \, K_2} = \int x^{-3} \, \mathrm{d}x = \underline{\frac{x^{-2}}{-2} + c_2} \qquad \underline{|| \, K_1} = \int -x^{-2} \, \mathrm{d}x = \underline{-\frac{x^{-1}}{-1} + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(x^{-1} + c_1\right) \mathrm{e}^{-2x} + \left(-0,5x^{-2} + c_2\right) \cdot x \, \mathrm{e}^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 \, \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \, x \, \mathrm{e}^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{0,5 \, x^{-1} \, \mathrm{e}^{-2x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 9.f Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ $\quad x > 0$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad y_1 = e^{-2x}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = e^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 e^{-2x} + c_2\, x\, e^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned} K_1' e^{-2x} + K_2'\, x\, e^{-2x} &= 0 \\ K_1' \left(e^{-2x}\right)' + K_2' \left(x \cdot e^{-2x}\right)' &= e^{-2x} \ln x \end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{array}{rcl} K_1' \, e^{-2x} + K_2' \, x \, e^{-2x} & = 0 & \quad | \cdot 2 \\ K_1' \, e^{-2x}(-2) + K_2' \left[e^{-2x} + x \cdot e^{-2x}(-2) \right] & = e^{-2x} \ln x & \\ \hline K_2' \, e^{-2x} & = e^{-2x} \ln x & \quad | \cdot \left(e^{2x}\right) \\ K_2' & = \ln x & \end{array}$$

a po dosazení do první rovnice

$$K_1' = -x \ln x$$

$$\underline{\| \, K_2} = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \, x \, dx = x \ln x - \int dx = \underline{x \ln x - x + c_2}$$

$$\underline{\| \, K_1} = \int -x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = -x \\ u' = \frac{1}{x} & v = -\frac{x^2}{2} \end{array} \right| = -\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx = \underline{-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c_1 \right) e^{-2x} + (x \ln x - x + c_2) \cdot x \, e^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 \, e^{-2x} + c_2 \, x \, e^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{x^2}{2} e^{-2x} \ln x - \frac{3x^2}{4} e^{-2x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$