FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

(v reálném oboru)

Studijní materiály

Brno 2017

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplín jak v přírodních vědách tak v technických vědách jsou ***diferenciální rovnice***.

Obyčejná diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí jedné proměnné (většinou označovanou $y(x)$ nebo jen y), jejími derivacemi a nezávislou proměnnou (většinou značíme x). **Parciální** diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí několika proměnných, jejími parciálními derivacemi a nezávisle proměnnými.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. **Řešením** diferenciální rovnice k–tého řádu rozumíme každou funkci, která má všechny derivace až do řádu k včetně a danou rovnici splňuje. Diferenciální rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna (***obecné řešení***) její řešení (= *integrály*). Křivku, která je grafem nějakého integrálu (= *řešení*) diferenciální rovnice, nazveme **integrální křivkou**.

Partikulárním řešením (integrálem) diferenciální rovnice rozumíme řešení splňující určité podmínky.

Mějme dánu rovnici $y' = f(x,y)$, kde funkce $f(x,y)$ je spojitá na nějaké oblasti $\mathcal{D}$. Uspořádanou trojici $[x, y, y']$ nazveme ***lineárním elementem*** diferenciální rovnice. Tyto elementy pro $\forall [x, y] \in \mathcal{D}$ určují tak zvané ***směrové pole***. Křivky protínající všechny integrální křivky pod stejným úhlem se nazývají ***izokliny***. Přibližný průběh integrálních křivek určujeme pomocí lomených čar (princip numerického řešení diferenciální rovnice), které jsou tvořeny lineárními elementy. Každou takovou lomenou čáru nazýváme **Eulerovým polygonem**.

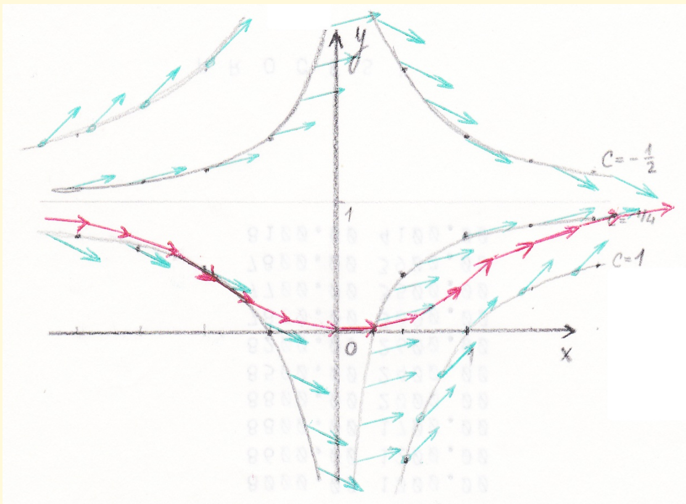
Na následujícím obrázku vlevo jsou pro diferenciální rovnici $y' = x \cdot (1 - y)$

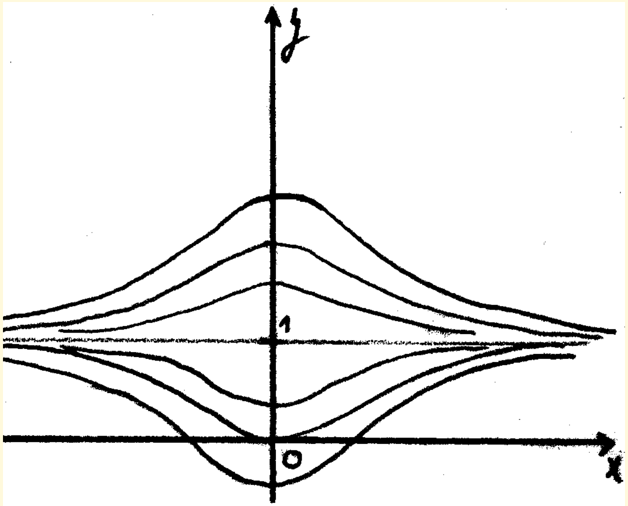
izokliny — $y' = c$ (konst.), hyperboly

směrové pole — $[x, y, y']$

Eulerův polygon

a na obrázku vpravo jsou (neuměle) nakreslena řešení $y = 1 + c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ pro nějaké hodnoty konstanty c .





S řešením diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ nebo $F(x,y,y') = 0$ jsou spjaty tyto základní otázky [1]:

Existence — kdy má diferenciální rovnice řešení.

$f(x,y)$ je spojitá na uzavřené oblasti $\mathcal{D}: \begin{array}{l} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \end{array}$ a je tedy na $\mathcal{D}$ ohraničená.

[1]Problematika je probírána na přednáškách a v literatuře (např. DIBLÍK, J., PŘIBYL, O.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno : VUT v Brně, Fakulta stavební, 150 s., 2004. ISBN 80–214–2795–7)

Pro diferenciální rovnici danou implicitně musí navíc platit $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Jednoznačnost — kdy daným podmínkám vyhovuje právě jedno partikulární řešení.

$f(x,y)$ splňuje vzhledem k y *Lipschitzovu* podmínku, kterou velmi často nahrazujeme silnějším předpokladem, že parciální derivace f_y je ohraničená v $\mathcal{D}$ $\forall [x\,,y] \in \mathcal{D}$.

Metody řešení — následně budeme probírat pouze některé typy diferenciálních rovnic.

Singulární integrál (řešení) obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x,y)$, je takové řešení, které ve všech svých bodech porušuje vlastnost jednoznačnosti. Tedy v libovolném okolí každého bodu singulárního integrálu existují alespoň dvě různé integrální křivky, které tímto bodem procházejí. Jestliže funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech uvažované oblasti parciální derivaci f_y , pak Lipschitzova podmínka není splněna v těch bodech, v nichž je tato parciální derivace f_y neohraničená.

Obálkou systému křivek rozumíme křivku (pokud existuje), která se v každém svém bodě dotýká jedné křivky systému a naopak, každá křivka systému se v nějakém svém bodě dotýká obálky. Je-li obálka (nebo její část) řešením dané diferenciální rovnice, je singulárním integrálem této rovnice.

V nejjednodušší formě jste se s diferenciálními rovnicemi setkali již u neurčitého integrálu, kdy jste vlastně řešili rovnici:

$$y' = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$$\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y = F(x) + c$$

Separovatelná diferenciální rovnice

Příklad 1. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

$$(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$$

$$(1+x)\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}x \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ;\ y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad (1)$$

Separovaná dif. rovnice: $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\ln|1+x| + c_2$$

$$\ln|y| = 2\ln|1+x| + \underbrace{c_2 - c_1}_{k} \qquad k = \ln|C|\ ;\ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad (2)$$

$$\ln|y| = \ln(1+x)^2 + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln[(1+x)^2 \cdot |C|]$$

$$|y| = (1+x)^2 \cdot |C| \qquad \text{vhodnou volbou (znaménka) } C$$

$$y = (1+x)^2 \cdot C$$

$$0 = (1+x)^2 \cdot C - y \qquad (3)$$

Poznámky:

1. Jak je patrné z řádku 2, není zapotřebí psát integrační konstantu po každém integrování, protože všechny konstanty můžeme sečíst dohromady tak, jak je naznačeno svorkou. Stačí tedy psát jedinou konstantu až po závěrečném integrování.

2. Není nutné označovat konstantu jenom písmenem. Můžeme použít jakýkoliv jiný zápis, na řádku 2 například *„přirozený logaritmus z absolutní hodnoty nějakého čísla“*.

3. Výsledek uvedený na řádku 3 jsme obdrželi za podmínek uvedených na řádku 1. Tedy

$$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pokud by totiž platilo $C = 0$, tak by také $y = 0$, což odporuje druhé podmínce v řádku 1.

Je zřejmá následující otázka:
„Dostaneme také nějaké řešení naší rovnice, když podmínky v řádku 1 nebudou splněny?“

Jinými slovy: ***Neztratili jsme nějaká řešení díky podmínkám?***

Ověření nutnosti podmínek, za kterých jsme našli řešení:

$y = 0 \implies y'_x = 0$ Zadanou rovnici $(1 + x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$ nejdříve upravíme na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y'_x) = \frac{2y}{1 + x} \qquad x \neq -1\,.$$

Po dosazení:

$$0 = \frac{2 \cdot 0}{1 + x}$$

je zřejmé, že $y = 0$ je také řešením zadané rovnice.

$x = -1 \implies x'_y = 0$ Zadanou rovnici $(1 + x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$ nejdříve upravíme na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (x'_y) = \frac{1 + x}{2y} \qquad y \neq 0\,.$$

Po dosazení:

$$0 = \frac{1 + (-1)}{2y}$$

je zřejmé, že $x = -1$ je také řešením zadané rovnice.

Tedy vztah uvedený na řádku 3 ve výpočtu je řešením zadané diferenciální rovnice, přičemž $x; y; C$ mohou nabývat libovolných reálných hodnot.

Všechna řešení rovnice $(1 + x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$

jsou dána implicitním vzorcem $F(x; y) : (1 + x)^2 \cdot C - y = 0 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}\,.$

Diferenciální rovnice řešené substitucí

Příklad 2. Najděte řešení počáteční úlohy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+2y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Řešení: $x \neq -2y$ Zkusíme **substituci**,

$$\left| \begin{aligned} x + 2y &= u \\ x + 2\boldsymbol{y}(x) &= \boldsymbol{u}(x) \\ 2y &= u - x \\ y &= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}x \\ y' &= \frac{1}{2}u' - \frac{1}{2} \end{aligned} \right|$$

kterou dosadíme do původní rovnice.

Po dosazení:

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{2} = \frac{1}{u} \qquad x \neq -2y \quad \Rightarrow \quad u \neq 0 \qquad \text{ale} \quad x = 1\,;\ y = 0$$

$$u' - 1 = \frac{2}{u}$$

$$u' = \frac{2}{u} + 1$$

$$u' = \frac{2+u}{u}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2+u}{u} \qquad u \neq -2 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2y-2 \qquad \text{ale} \quad x = 1\,;\ y = 0$$

$$\frac{u}{2+u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{u}{2+u}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{(2+u)-2}{2+u}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{2+u}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$

$$u - 2\ln|2+u| + 2k = x$$

$$\frac{u-x}{2} + k = \ln|2+u|$$

$$\frac{(x+2y)-x}{2} + k = \ln|2+(x+2y)|$$

$$y + k = \ln|2+x+2y|$$

$$\mathrm{e}^{y+k} = |2+x+2y|$$

$$\mathrm{e}^{y}\cdot\mathrm{e}^{k} = |2+x+2y| \qquad \mathrm{e}^{k} = |c|$$

$$\mathrm{e}^{y}\cdot|c| = |2+x+2y| \qquad \text{vhodnou volbou znaménka } c$$

$$c\mathrm{e}^{y} = 2+x+2y$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(1) = 0$.

$$c \cdot \mathrm{e}^{(0)} = 2 + (1) + 2(0)$$
$$c \cdot 1 = 3$$
$$c = 3$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x + 2y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x; y) : 3\mathrm{e}^{y} = 2 + x + 2y$.

Příklad 3. Najděte řešení (homogenní) počáteční úlohy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Řešení: $x \neq y$ Zkusíme **substituci**,

kterou dosadíme do původní rovnice.

$$\left|\begin{aligned} y &= xu \\ \boldsymbol{y}(x) &= x \cdot \boldsymbol{u}(x) \\ y' &= u + xu' \\ \frac{y}{x} &= u \end{aligned}\right|$$

Po dosazení:

$$u + xu' = \frac{x + xu}{x - xu} \qquad x \neq y \quad \Rightarrow \quad u \neq 1 \qquad \text{ale} \quad x = 2\,;\ y = 0$$

$$xu' = \frac{x(1+u)}{x(1-u)} - u$$

$$xu' = \frac{1 + u - u(1-u)}{1-u}$$

$$xu' = \frac{1+u^2}{1-u} \qquad x \neq 0 \qquad \text{ale požadujeme} \quad x = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u^2}{(1-u)x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\int \frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
2\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \int \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
2\operatorname{arctg} u - \ln(1+u^2) &= 2\ln|x| + \ln c \qquad c > 0 \\
2\operatorname{arctg} u &= \ln(1+u^2) + 2\ln|x| + \ln c \\
2\operatorname{arctg} u &= \ln[(1+u^2)\,x^2 c] \\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg} u} &= (1+u^2)\,x^2 c \\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] x^2 c \\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= (x^2+y^2)\,c \\
\frac{1}{c}\cdot \mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= x^2+y^2 \\
0 &= x^2+y^2-\frac{1}{c}\cdot \mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(2) = 0$.

$$0 = 2^2 + 0^2 - \frac{1}{c} \cdot \mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{0}{2}}$$

$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot \mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,0}$$

$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0}$$

$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot \mathrm{e}^{0}$$

$$0 = 4 - \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} = 4$$

$$\frac{1}{4} = c$$

Řešení počáteční úlohy $\left\{\begin{array}{l} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(2) = 0 \end{array}\right.$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y) : 0 = x^2 + y^2 - 4\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}$

Příklad 4. Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' + 2xy = 2x^3y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

Nejprve si rovnici upravíme $y'y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3$; $y \neq 0$ ale požadujeme $y = 1$

a potom zkusíme **substituci** $\left| \begin{array}{c} y^{-2} = u \\ \boldsymbol{y}^{-2}(x) = \boldsymbol{u}(x) \\ -2y^{-3}y' = u' \\ y^{-3}y' = -\frac{u'}{2} \end{array} \right|$ kterou dosadíme do původní rovnice.

Po dosazení:

$$-\frac{u'}{2} + 2xu = 2x^3$$

$$u' - 4xu = -4x^3$$

Tato lineární diferenciální rovnice je (s jinými písmeny) vyřešena ZDE.

$$u = x^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x^2}$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(0) = 1$.

$$\frac{1}{1^2} = 0^2 + \frac{1}{2} + ce^{2\cdot 0^2}$$
$$1 = \frac{1}{2} + ce^0$$
$$1 = \frac{1}{2} + c$$
$$\frac{1}{2} = c$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' + 2xy = 2x^3y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y) : 2 = \left(2x^2 + 1 + e^{2x^2}\right) y^2$ **.**

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu $y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Příklad 5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 2y = x$ $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - 2y = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - 2y &= 0 \\
y' &= 2y \qquad\qquad y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x \qquad\qquad c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x \qquad\qquad \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x} \\
y &= c \cdot \mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \implies y = 0 \implies y' = 0$

$0 - 2 \cdot 0 = 0$ *řešíme **přidruženou homogenní** rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Ke stejnému výsledku bychom se dopracovali i pomocí charakteristické rovnice ($\lambda - 2 = 0$, protože zadaná rovnice má konstantní koeficienty) tak, jak bude ukázáno u rovnic vyššího řádu. Stejně tak bychom také mohli odhadnout partikulární řešení nehomogenní rovnice (protože jde o rovnici se speciální pravou stranou), ale my použijeme obecnější postup.

2. Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x}$$ konstantu c nahradíme vhodnou funkcí $K(x)$

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \\ y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} \left[K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right] - 2\left[K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\right] &= x \\ K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} &= x \\ K'(x) &= x\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$K(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c$$

$$\begin{aligned} K(x) &= -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c \\ y &= \left(-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c\right)\mathrm{e}^{2x} \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c\mathrm{e}^{2x} = \underbrace{c\mathrm{e}^{2x}}_{y_H} \underbrace{-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 2y = x$

je funkce $f(x): y = c\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Příklad 6. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 4xy = -4x^3$ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - 4xy = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - 4xy &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4xy && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 4x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 4x\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x^2 && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x^2 && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x^2 \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x^2} \\
y &= c\mathrm{e}^{2x^2}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \implies y = 0 \implies y' = 0$

$0 - 4x \cdot 0 = 0$ *řešíme* ***přidruženou homogenní*** *rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = ce^{2x^2} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = ce^{2x^2}$$ konstantu c nahradíme vhodnou funkcí $K(x)$

$$y = K(x) \cdot e^{2x^2}$$
$$y' = K'(x) \cdot e^{2x^2} + K(x) \cdot e^{2x^2} \cdot (4x)$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\left[K'(x) \cdot e^{2x^2} + K(x) \cdot e^{2x^2} \cdot (4x)\right] - 4x\left[K(x) \cdot e^{2x^2}\right] = -4x^3$$
$$K'(x) \cdot e^{2x^2} = -4x^3$$
$$K'(x) = -4x^3 e^{-2x^2}$$

$$K(x) = \int (-2x^2) 2e^{-2x^2} \underbrace{x\,dx} = \left| \begin{array}{c} -2x^2 = t \\ -4x\,dx = dt \\ \underbrace{x\,dx} = -\frac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int \left[(t)2e^t\left(-\frac{1}{4}\right)\right] dt = \int -\frac{1}{2} t e^t\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = -\frac{1}{2}t & v' = e^t \\ u' = -\frac{1}{2} & v = e^t \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{2}te^t\right] - \int -\frac{1}{2}e^t\,dt = -\frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}(-2x^2)e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + c$$

$$K(x) = x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + c$$

$$y = \left(x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + c\right) e^{2x^2}$$

$$y = x^2 + \frac{1}{2} + c e^{2x^2} = \underbrace{c e^{2x^2}}_{y_H} + \underbrace{x^2 + \frac{1}{2}}_{y_P}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 4xy = -4x^3$

je funkce $f(x) : y = c e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Příklad 7. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $xy' + 3y = 4x$ $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

po úpravě: $(x \neq 0)$ $y' + \frac{3}{x} \cdot y = 4$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' + \frac{3}{x} \cdot y = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' + \frac{3}{x} \cdot y &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3}{x} \cdot y \qquad\qquad y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -3\ln|x| + \ln|c| \qquad\qquad c \neq 0 \\
\ln|y| &= \ln\frac{|c|}{|x|^3} \qquad\qquad \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
y &= \frac{c}{x^3}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$$0 + \frac{3}{x} \cdot 0 = 0$$ *řešíme **přidruženou homogenní** rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = \frac{c}{x^3} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = \frac{c}{x^3}$$

konstantu c nahradíme vhodnou funkcí $K(x)$

$$\begin{aligned} y &= \frac{K(x)}{x^3} = K(x) \cdot x^{-3} \\ y' &= K'(x) \cdot x^{-3} + K(x) \cdot (-3)x^{-4} \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} x \cdot \left[K'(x) \cdot x^{-3} + K(x) \cdot (-3)x^{-4}\right] + 3\left[K(x) \cdot x^{-3}\right] &= -4x^3 \\ K'(x) \cdot x^{-2} &= 4x \\ K'(x) &= 4x^3 \\ K(x) &= \int 4x^3 \, \mathrm{d}x \\ K(x) &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= x^4 + c \\ y &= \left(x^4 + c\right) x^{-3} \\ y &= \frac{x^4 + c}{x^3} = \underbrace{\frac{c}{x^3}}_{y_H} + \underbrace{x}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $xy' + 3y = 4x$

je funkce $f(x) : y = \dfrac{x^4 + c}{x^3} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Příklad 8. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $x^2y' - y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$ $x \neq 0\,;\ y \in \mathbb{R}$

po úpravě: $y' - \frac{1}{x^2} \cdot y = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - \frac{1}{x^2} \cdot y = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - \frac{1}{x^2} \cdot y &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x^2} \cdot y && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= -x^{-1} && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= -\frac{1}{x} && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= -\frac{1}{x} \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\
y &= c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$$0 - \frac{1}{x^2} \cdot 0 = 0$$ *řešíme **přidruženou homogenní** rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$ konstantu c nahradíme vhodnou funkcí $K(x)$

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = K(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}} \\ y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}} \cdot (x^{-2}) \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \left[K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}} \cdot (x^{-2})\right] - \left[K(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}}\right] &= x^2 \cdot \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} \\ x^2 \cdot K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} &= x^2 \cdot \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} \\ K'(x) &= \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ K'(x) &= \mathrm{e}^{x} \\ K(x) &= \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= \mathrm{e}^{x} + c \\ y &= (\mathrm{e}^{x} + c) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\ y &= \underbrace{c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}_{y_H} + \underbrace{\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $x^2 y' - y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$

je funkce $f(x) : y = (\mathrm{e}^{x} + c) \cdot \mathrm{e}^{-x^{-1}}$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Exaktní diferenciální rovnice $P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y = 0$

Příklad 9. Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

Mohli bychom použít substituci tak, jako v tomto příkladu, ale ukážeme si jiný postup.

Řešení: Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak existuje funkce $F(x;y)$ taková, že $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P\,;\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Nebo jinak $F = \displaystyle\int P\,\mathrm{d}x\,;\quad F = \int Q\,\mathrm{d}y\,.$ Funkce $F(x;y)$ se nazývá ***kmenová funkce*** a výraz

$\mathrm{d}F(x;y) = P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem této kmenové funkce.

$F(x,y) = 0$ **je** potom **řešením** dané **diferenciální rovnice.**

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial(x-y)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$F(x;y) = \int (x+y)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)\right)'_y = x + \varphi'(y) = x - y = Q$$

$$\varphi'(y) = -y$$

$$\varphi(y) = \int -y\,\mathrm{d}y = \frac{-y^2}{2} + c \qquad (5)$$

Po dosazení výsledku 5 do 4 dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice

$$F(x;y):\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+c=0$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(1)=1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+c&=0\\ \frac{1^2}{2}+1\cdot 1-\frac{1^2}{2}+c&=0\\ 1&=-c\\ -1&=c\end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0\\ y(1)=1\end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y):\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=1$

Příklad 10. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $(2y+3x)\,\mathrm{d}x-(4y-2x)\,\mathrm{d}y=0$

$x\in\mathbb{R}\,;\ y\in\mathbb{R}$ Opět bychom mohli použít **substituci** $y(x)=x.u(x) \quad\Rightarrow\quad y'=u+x.u'$

$$(2y+3x)\,\mathrm{d}x-(4y-2x)\,\mathrm{d}y=0$$

$$(2y+3x)\,\mathrm{d}x=(4y-2x)\,\mathrm{d}y \qquad x\neq 2y$$

$$\frac{2y+3x}{4y-2x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$y'=\frac{2y+3x}{4y-2x}$$

$$u+x.u'=\frac{2x.u+3x}{4x.u-2x}$$

$$u+x.u'=\frac{2u+3}{4u-2}$$

$$x.u'=\frac{2u+3}{4u-2}-u$$

$$x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-4u^2+4u+3}{4u-2}$$

$$\int\frac{4u-2}{(2u+1)(3-2u)}\,\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Racionální funkci na levé straně rozložíme na parciální zlomky a ...

Řešení exaktní rovnice Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak ...

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(2y+3x)}{\partial y} = 2 = -\dfrac{\partial(4y-2x)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$F(x;y) = \int (2y+3x)\,\mathrm{d}x = 2y\cdot x + 3\cdot\frac{x^2}{2} + \varphi(y) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(2y\cdot x + 3\cdot\frac{x^2}{2} + \varphi(y)\right)'_y = 2x + \varphi'(y) = -(4y-2x) = Q$$

$$\varphi'(y) = -4y$$

$$\varphi(y) = \int -4y\,\mathrm{d}y = -4\cdot\frac{y^2}{2} + c \qquad (7)$$

Po dosazení výsledku 7 do 6 dostáváme $F(x;y) : 2x.y + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 2y^2 + c$
a všechna řešení diferenciální rovnice
jsou dána

implicitním vzorcem $F(x;y) : 2x.y + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 2y^2 + c = 0 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$ **.**

Příklad 11. Najděte všechna řešení dif. rov.: $(3x^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x - (4y^2 - 2xy - x^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Opět bychom mohli použít substituci jako u „homogenní“ rovnice.

Řešení exaktní rovnice: $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak ...

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(3x^2 + 2xy + y^2)}{\partial y} = 2x + 2y = -\dfrac{\partial(4y^2 - 2xy - x^2)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$
\begin{aligned}
F(x;y) &= \int (3x^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2y\cdot\frac{x^2}{2} + y^2.x + \varphi(y) && (8)\\
\frac{\partial F}{\partial y} = \left(x^3 + x^2.y + x.y^2 + \varphi(y)\right)'_y &= x^2 + 2xy + \varphi'(y) = -(4y^2 - 2xy - x^2) = Q\\
\varphi'(y) &= -4y^2\\
\varphi(y) &= \int -4y^2\,\mathrm{d}y = -4\cdot\frac{y^3}{3} + c && (9)
\end{aligned}
$$

Po dosazení výsledku 9 do 8 dostáváme $F(x;y) : x^3 + x^2y + xy^2 - 4\cdot\frac{y^3}{3} + c$
a všechna řešení diferenciální rovnice
jsou dána

implicitním vzorcem $F(x;y) : x^3 + x^2y + xy^2 - 4\cdot\frac{y^3}{3} + c = 0 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$ **.**

Příklad 12. Najděte všechna řešení dif. rov.: $(x^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x - (y^2 - 2xy - x^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Opět bychom mohli použít substituci jako u „homogenní" rovnice.

Řešení exaktní rovnice: $x \in \mathbb{R}\,;\; y \in \mathbb{R}$ Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak ...

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(x^2 + 2xy + y^2)}{\partial y} = 2x + 2y = -\dfrac{\partial(y^2 - 2xy - x^2)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$F(x;y) = \int (x^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2y\cdot\frac{x^2}{2} + y^2.x + \varphi(y) \qquad (10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{3} + x^2.y + x.y^2 + \varphi(y)\right)'_y = x^2 + 2xy + \varphi'(y) = -(y^2 - 2xy - x^2) = Q$$

$$\varphi'(y) = -y^2$$

$$\varphi(y) = \int -y^2\,\mathrm{d}y = -\frac{y^3}{3} + c \qquad (11)$$

Po dosazení výsledku 11 do 10 dostáváme $F(x;y) : \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - \frac{y^3}{3} + c$
a všechna řešení diferenciální rovnice
jsou dána

implicitním vzorcem $F(x;y) : \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - \frac{y^3}{3} + c = 0 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$.

Příklad 13. Najděte všechna řešení dif. rov.: $(2x^3 - xy^2)\,\mathrm{d}x + (2y^3 - x^2y)\,\mathrm{d}y = 0$

Opět bychom mohli použít substituci jako u „homogenní" rovnice.

Řešení exaktní rovnice: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$ Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak ...

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(2x^3 - xy^2)}{\partial y} = -2xy = \dfrac{\partial(2y^3 - x^2y)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$
\begin{aligned}
F(x;y) &= \int (2x^3 - xy^2)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^4}{4} - y^2\cdot\frac{x^2}{2} + \varphi(y) && (12)\\
\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\cdot y^2 + \varphi(y)\right)'_y &= -\frac{x^2}{2}\cdot 2y + \varphi'(y) = 2y^3 - x^2y = Q\\
\varphi'(y) &= 2y^3\\
\varphi(y) &= \int 2y^3\,\mathrm{d}y = 2\cdot\frac{y^4}{4} + c && (13)
\end{aligned}
$$

Po dosazení výsledku 13 do 12 dostáváme $F(x;y) : \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^4}{2} + c$
a všechna řešení jsou dána

implicitním vzorcem $F(x;y) : x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2c = 0 \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$

nebo

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = k \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$$