

Určitý integrál

Stanovte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$$

když víte: $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + \text{konst.}$

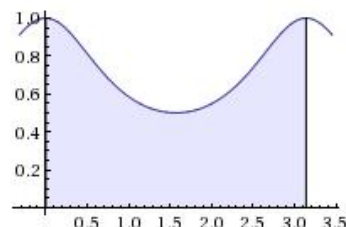
Správnost primitivní funkce (neurčitého integrálu) si můžete ověřit derivováním nebo použijte **MAW** a poté zvolte **Pomoc s hledáním primitivní funkce**. Definičním oborem integrované funkce jsou všechna reálná čísla.

1. Nekorektní použití základní věty integrálního počtu¹

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} \pi) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} 0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cdot 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cdot 0) = 0 \quad (\text{tento výsledek dává výše zmíněný MAW}) \end{aligned}$$

Ovšem!

1. Zadaná funkce, kterou integrujeme, je kladná.
2. U kladné funkce určitým integrálem počítáme plošný obsah, ohraničený touto funkcí a osou x
3. A tento plošný obsah není (viz obrázek) roven NULE!

**2. Primitivní funkce je nespojitá² pro $x = \frac{\pi}{2}$**

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right] + \\ &\quad + \left[\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0 - \lim_{b \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} b \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \doteq 2,22 \quad (\text{tento výsledek dává např. WolframAlpha}) \end{aligned}$$

¹ Podle **Poznámky 2.3.** na straně 6 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Příbyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978-80-7204-525-9), musí být primitivní funkce na **uzavřeném** intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ **spojitá**, jinak nejsme oprávněni následující postup $\int_0^{\pi} f(x) dx = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$ použít.

² Nejdříve využijeme aditivnosti integrálu (ve vhodném bodě jej rozdělíme na dva) a potom budeme postupovat podle **Definice 2.2.** tamtéž: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$

$$1. \quad [x \in (-1; \infty)] \int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_{-1}^2 (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_{-1}^2 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in (-1; \infty)$, tedy i pro $x \in (-1; 2)$, proto

$$= \left[2\sqrt{x+1} \right]_{-1}^2 = 2\sqrt{2+1} - 2\sqrt{-1+1} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

$$2. \quad [x \in (-1; \infty)] \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_{-1}^{\infty} \text{ primitivní funkce je spojitá: } x \in (-1; \infty)$$

$$= \left[2\sqrt{x+1} \right]_{-1}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x+1}) - 2\sqrt{-1+1} = \infty - 0 \Rightarrow \text{integrál neexistuje (diverguje)}$$

$$3. \quad [x \neq 0; x \neq 1] \int_{-1}^2 \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_{-1}^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[-\ln|x| + \ln|x-1| \right]_{-1}^2 =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_{-1}^2 \quad \text{primitivní funkce je spojitá pro } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty), \text{ proto}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_1^2 \frac{1}{x(x-1)} dx =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_{-1}^0 + \left[\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_0^1 + \left[\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_1^2 =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \ln \left| \frac{-1-1}{-1} \right| \right) +$$

$$+ \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right) +$$

$$+ \left(\ln \left| \frac{2-1}{2} \right| - \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right) =$$

$$= \infty - \ln 2 - \infty - \infty - \ln 2 + \infty \Rightarrow \text{integrál neexistuje}$$

$$4. \quad [x \in \mathbb{R}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = y \\ x^2+1 = y^2 \\ 2x dx = 2y dy \\ x dx = y dy \end{array} \right| = \int_{(x \rightarrow -\infty)}^{(x \rightarrow \infty)} \frac{y}{y} dy = [y] = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, proto

$$= \left[\sqrt{x^2+1} \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty - \infty \Rightarrow \text{integrál neexistuje}$$

$$5. \quad [x \in (0; \infty)] \int_0^1 \ln x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \ln x \\ u = x \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 dx = [x \ln x]_0^1 - [x]_0^1 = [x \ln x - x]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in (0; \infty)$, tedy i pro $x \in (0; 1)$, proto

$$= [x \ln x - x]_0^1 = (1 \cdot \underbrace{\ln 1}_0 - 1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) = (-1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) + 0 =$$

$$= -1 - \left[\frac{-\infty}{\infty} \right]^{l'H.} = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \underline{\underline{-1}}$$

$$6. \quad [x \neq 0] \int_3^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \int_3^\infty x^{-2} \, dx = [-x^{-1}]_3^\infty = \left[\frac{-1}{x} \right]_3^\infty =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \neq 0$, tedy i pro $x \in (3; \infty)$, proto

$$= \left[\frac{-1}{x} \right]_3^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} - \frac{-1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$7. \quad [x \neq 0] \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_{-1}^1 x^{-2} \, dx = [-x^{-1}]_{-1}^1 = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \neq 0$, tedy i pro $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, proto

$$= \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{-1}{x} \right]_0^1 = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} - \frac{-1}{-1} \right) + \left(\frac{-1}{1} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} \right) = \infty - 1 - 1 + \infty$$

$\Rightarrow$ **integrál neexistuje**

$$8. \quad [x \in \mathbb{R}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx = \left| \frac{\operatorname{arctg} x = y}{\frac{1}{1+x^2} \, dx = dy} \right| = \int_{(x \rightarrow -\infty)}^{(x \rightarrow \infty)} y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R} / y \in \mathbb{R}$, proto

$$= \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$9. \quad [x \in \mathbb{R}] \int_0^\infty x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right| = [x \cdot (-\cos x)]_0^\infty - \int_0^\infty (-\cos x) \, dx =$$

$$[x \cdot (-\cos x)]_0^\infty + [\sin x]_0^\infty = [x \cdot (-\cos x) + \sin x]_0^\infty$$

proto: $[x \cdot (-\cos x) + \sin x]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x \cos x + \sin x) - (0 \cdot \underbrace{\cos 0}_1 + \underbrace{\sin 0}_0)$

ale $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$) **NEEXISTUJE** $\Rightarrow$ **integrál neexistuje**