Statickým momentem hmotného bodu vzhledem k nějaké rovině nebo přímce rozumíme součin $m \cdot r$, kde $\boldsymbol{m}$ znamená hmotu tohoto bodu a $\boldsymbol{r}$ je jeho (kolmá) vzdálenost od zmíněné roviny nebo přímky.

Momentem setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k nějaké ose $\boldsymbol{o}$ (kolem které se otáčí), rozumíme součin $m \cdot r^2$, kde $\boldsymbol{m}$ znamená hmotu tohoto bodu a $\boldsymbol{r}$ je jeho vzdálenost od zmíněné osy $\boldsymbol{o}$.

Statický moment (*moment setrvačnosti*) soustavy hmotných bodů je pak součet statických momentů (*momentů setrvačnosti*) všech těchto bodů. Pokud je jich nekonečně mnoho, mohou vytvořit:

křivku (představme si například kus velmi tenkého drátu);

plochu (představme si těleso, jehož jeden rozměr je vůči ostatním zanedbatelně malý);

těleso.

Pokud se nejedná o homogenní materiál, je zřejmé, že hmota může být v takové soustavě rozložena naprosto nerovnoměrně.

Statické momenty jsou důležité pro určení polohy těžiště hmotného útvaru, momenty setrvačnosti jsou důležité pro výpočet kinetické (pohybové) energie hmotného útvaru.

Statické momenty rovinného oblouku $\mathcal{L}$ o parametrických rovnicích $\mathcal{L}$: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha\,; \beta \rangle$

a o měrné hustotě $\varrho(t)$ [kg.m^{-1}] vzhledem k souřadným osám

se spočítají podle vzorců na str. 32 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978–80–7204–525–9):

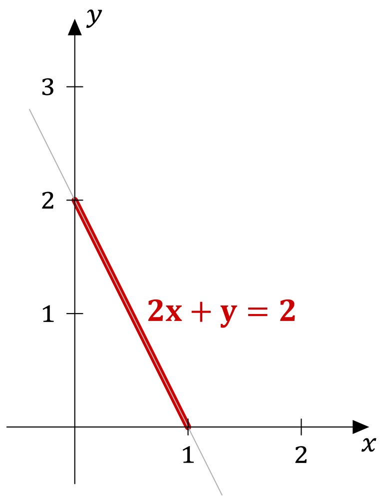
$$S_x(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\psi(t)}_{y} \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$

$$S_y(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\varphi(t)}_{x} \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t$$

Určete (vzhledem k souřadným osám) **statické momenty** $S_x(\mathcal{L})$ **a** $S_y(\mathcal{L})$ **úsečky** ležící na přímce

$$2x + y = 2$$

která je ohraničena souřadnými osami a jejíž měrná hustota je $\varrho(t) = 1$ $[\mathrm{kg.m^{-1}}]$.



Rovnici přímky upravíme na tvar: $y = 2 - 2x$

Za proměnnou x zvolíme parametr t

Pak: $x = t \quad \Rightarrow \quad x' = 1$

$y = 2 - 2t \quad \Rightarrow \quad y' = -2$

$t \in \langle 0\,;1\rangle$

a dosadíme do uvedených vzorců.

$$S_x(\mathcal{L}) = \int_\alpha^\beta \varrho(t)\cdot\underbrace{\psi(t)}_{y}\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\cdot(2-2t)\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2.\sqrt{5}\int_0^1 \mathrm{d}t - 2.\sqrt{5}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 2.\sqrt{5}\,\Big[t\Big]_0^1 - 2.\sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

obě primitivní funkce jsou na intervalu integrace **spojité**

$$= 2.\sqrt{5}\,[1-0] - 2.\sqrt{5}\left[\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] = 2.\sqrt{5}\left[1-\frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$$S_y(\mathcal{L}) = \int_\alpha^\beta \varrho(t)\cdot\underbrace{\varphi(t)}_{x}\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\cdot t\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**

$$= \sqrt{5}\left[\frac{1^2}{2}-0\right] = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}}$$

Těžiště rovinného oblouku $\mathcal{L}$ o parametrických rovnicích $\mathcal{L}\colon \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in \langle \alpha\,; \beta \rangle \end{array}$

a o měrné hustotě $\varrho(t)$ $[\mathrm{kg.m}^{-1}]$, se spočítá podle vzorce (str. 32 zmíněných skript):

$$T(\mathcal{L}) = \left[\frac{S_y}{m}\,; \frac{S_x}{m} \right]$$

kde **hmotnost** rovinného oblouku ***m*** je

$$m(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

a **statické momenty** rovinného oblouku vzhledem k souřadným osám jsou uvedeny na straně 1

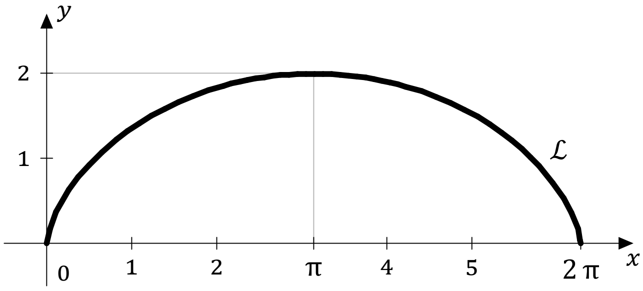
Určete souřadnice těžiště rovinného oblouku $\mathcal{L}$ o parametrických rovnicích

$\begin{array}{l} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{array}$ jestliže: $0 \le t \le 2\pi$ (jeden oblouk cykloidy) a $\varrho = 1\ \mathrm{kg.m}^{-1}$.

$x = t - \sin t\,;\quad x' = 1 - \cos t$

$y = 1 - \cos t\,;\quad y' = \sin t$

$t \in \langle 0\,; 2\pi \rangle$



Po dosazení:

$$\boldsymbol{m}(\mathcal{L}) = \int_0^{2\pi} (1)\cdot\sqrt{[(1-\cos t)]^2 + [(\sin t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\left(2\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right|\,\mathrm{d}t = \begin{array}{c} \text{funkce} \\ \sin\frac{t}{2}\ \text{je na} \\ \text{intervalu} \\ (0\,;2\pi) \\ \textbf{\textit{kladná}} \end{array} = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} \frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u \\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline 2\pi & \pi \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin u . 2\,\mathrm{d}u = 4\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \begin{array}{c} \text{primitivní funkce} \\ \text{je na intervalu} \\ \text{integrace } \textbf{spojitá} \end{array} = 4[-\underbrace{\cos\pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})] = \mathbf{8}\ \mathrm{j}$$

$$\boldsymbol{S}_x(\mathcal{L}) = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1)}_{\varrho} \cdot \underbrace{(1-\cos t)}_{y} \cdot \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot\sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos\left(2\tfrac{t}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[1-\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^3\mathrm{d}t = \begin{array}{c}\text{funkce } \sin\frac{t}{2}\\ \text{je na intervalu}\\ (0\,;2\pi)\ \textbf{\textit{kladná}}\end{array} = 4\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}_{\sin^3\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\cdot\underline{\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t} = \left|\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\cos\frac{t}{2} = u} \\ \multicolumn{2}{c}{-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u} \\ \multicolumn{2}{c}{\underline{\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t} = -2\,\mathrm{d}u} \\ t = 2\pi & u = -1 \\ t = \ \ 0 & u = \ \ 1 \end{array}\right| = 4\int_1^{-1}(1-u^2)\cdot(-2)\,\mathrm{d}u =$$

$$= +8\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,\mathrm{d}u = 8\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \begin{array}{c}\text{primitivní funkce}\\ \text{je na intervalu}\\ \text{integrace } \textbf{spojitá}\end{array}$$

$$= 8\left\{\left[1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]\right\} = 8\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{S}_y(\mathcal{L}) = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1)}_{\varrho} \cdot \underbrace{(t-\sin t)}_{x} \cdot \sqrt{[(1-\cos t)]^2 + [(\sin t)]^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\cdot\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{1-\cos\left(2\tfrac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t}_{\mathbf{A}} - \sqrt{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin t\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t}_{\mathbf{B}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4\pi - \sqrt{2}\cdot 0 = \mathbf{8}\pi$$

Kde: $\mathbf{A} = \displaystyle\int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{1-\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t =$

funkce $\sin\frac{t}{2}$ je na intervalu $(0\,;2\pi)$ ***kladná***

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\cdot\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u=t & v'=\sin\frac{t}{2} \\ u'=1 & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{2}\left\{\left[t\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\right\} = \sqrt{2}\left\{\left[-2\,t\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\right\} =$$

primitivní funkce jsou na intervalu integrace **spojité**

$$= \sqrt{2}\left[\left(-2\cdot 2\pi\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} + 2\cdot 0\cdot\underbrace{\cos 0}_{1}\right) + \left(4\underbrace{\sin\pi}_{0} - 4\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] =$$

$$\sqrt{2}(4\pi+0) = \sqrt{2}\cdot 4\pi$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\cdot\underbrace{\sin t\,\mathrm{d}t} = \left|\begin{matrix}1-\cos t = s \\ \sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s\end{matrix}\right| = \int_{t=0}^{t=2\pi}\sqrt{s}\,\mathrm{d}s = \int_{t=0}^{t=2\pi} s^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1-\cos t)^3}\right]_0^{2\pi} =$$ primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá** $$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1-\cos 2\pi)^3} - \sqrt{(1-\cos 0)^3}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1-1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}\right] = \frac{2}{3}\cdot[0-0] = 0$$

Souřadnice těžiště:

$$T = \left[\frac{8\pi}{8}\,;\frac{\frac{32}{3}}{8}\right] \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{T = \left[\pi\,;\frac{4}{3}\right]}}$$

Těžiště tenké rovinné desky $\mathcal{A}$ (jejíž každý bod je v ***kartézských souřadnicích*** vyjádřen: $\mathcal{A} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \le x \le b\,,\; g(x) \le y \le f(x)\}$)
o plošné (měrné) hustotě $\varrho(x)$ $[\mathrm{kg.m}^{-2}]$, kde f, g jsou spojité funkce $\forall x \in \langle a\,; b\rangle$,
se spočítá podle vzorce (str. 29 zmíněných skript):

$$T(\mathcal{A}) = \left[\frac{S_y}{m}\,; \frac{S_x}{m}\right]$$

kde hmotnost tenké rovinné desky $\boldsymbol{m}$ je

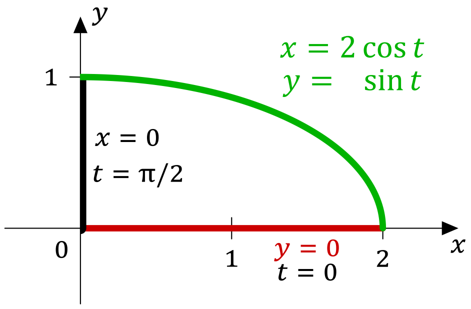
$$m(\mathcal{A}) = \int_a^b \varrho(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

a statické momenty tenké rovinné desky vzhledem k souřadným osám jsou

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\int_a^b \varrho(x)\,\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,\mathrm{d}x \qquad S_y(\mathcal{A}) = \int_a^b \varrho(x)\,x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

Určete souřadnice těžiště tenké *homogenní* rovinné desky $\mathcal{A}$ jejíž každý bod vyhovuje vztahům $\mathcal{A} = \left\{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 2\cos t\,,\; 0 \le y \le \sin t\,,\; t \in \left\langle 0\,; \frac{\pi}{2}\right\rangle\right\}$,
jestliže $\varrho = 1$ $[\mathrm{kg.m}^{-2}]$.

Nakreslíme si hranice dané plochy, přičemž křivka je zadána parametricky:



Je zřejmé, že plocha je ohraničena

- částí osy y
- čtvrtinou elipsy
- částí osy x

Kartézská souřadná soustava. Nejprve z parametrických rovnic elipsy sestavíme funkci:

$f(x) : y = \dots\,;$ $\qquad g(x) = 0$

$$\begin{array}{ll} x = 2\cos t & |^2 \\ y = \sin t & |^2 \\ \hline x^2 = 4\cos^2 t & \\ y^2 = \sin^2 t & |\cdot 4 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$x^2 + 4y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t$$

$$4y^2 = 4\cdot\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} - x^2$$

$$y^2 = 1 - \tfrac{1}{4}x^2$$ v 1. kvadrantu jsou x i y **nezáporná**

$$y = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4 - x^2}$$ a po dosazení do uvedených vzorců

$$m(\mathcal{A}) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} - 0\right] \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{4}\cdot\sin y \\ \mathrm{d}x = 2\cdot\cos y\,\mathrm{d}y \\ x \quad \begin{array}{c|c} 2 & \pi/2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad y \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{4-4\sin^2 y}\cdot 2\cos y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\cdot \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{\cos^2 y} = |\cos y|}\cdot\cos y\,\mathrm{d}y =$$

funkce $\cos y$ je na oboru integrace ***kladná***, proto nepíšeme **absolutní hodnotu**

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\cos^2 y\,\mathrm{d}y =$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y \\ \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \\ \hline\hline 2\cos^2 y = 1 + \cos 2y \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2y)\,\mathrm{d}y = \left[y + \frac{1}{2}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace ***spojitá***

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\frac{\pi}{2}}_{0}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\cdot 0)}_{0}\right) = \frac{\pi}{2}\mathrm{j}$$

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{1}_{\varrho}\cdot\left[\frac{1}{4}(4-x^2) - 0^2\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{8\cdot 3}\cdot x^3\right]_0^2 =$$

primitivní funkce jsou na intervalu integrace ***spojité***

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8\cdot 3}\cdot 2^3\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{8\cdot 3}\cdot 0^3\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_y(\mathcal{A}) = \int_0^2 \underbrace{1}_{\varrho}\cdot x\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} - 0\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cdot\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sqrt{4-x^2} = z \\ 4 - x^2 = z^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2z\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-z}{x}\,\mathrm{d}z \\ x \quad \begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad z \end{array} \right| =$$

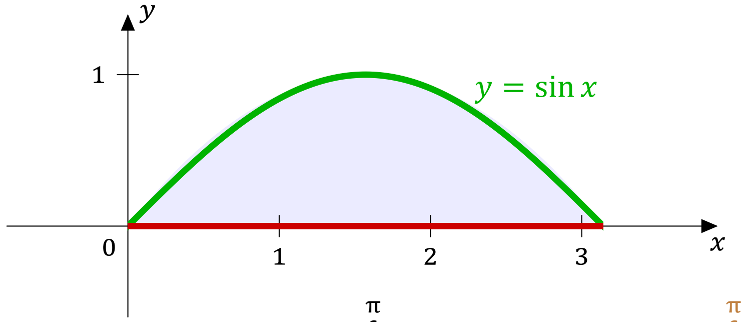
$$= \frac{1}{2}\int_2^0 x\cdot z\cdot\frac{-z}{x}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^2 z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^2 =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace ***spojitá***

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 0\right) = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{T} = \left[\frac{\frac{4}{3}}{\frac{\pi}{2}}; \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\underline{\left[\frac{8}{3\pi}; \frac{4}{3\pi}\right]}}$$

Určete souřadnice těžiště tenké rovinné desky $\mathcal{A}$ ohraničené křivkou $\boldsymbol{f}(x) : y = \sin x$ a osou $\boldsymbol{x}$ $(\Rightarrow \boldsymbol{g}(x) : y = 0)$, pro $0 \le x \le \pi$, jestliže $\varrho(x) = x + 1$ [kg.m^{-2}] .



a po dosazení do vzorců:

$$m(\mathcal{A}) = \int_0^\pi \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)}\,[\sin x - 0]\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathbf{B}} = \pi + 2$$

$$\mathbf{A} = \int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= [-x\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi =$$

primitivní funkce jsou na intervalu integrace **spojité**

$$= \Big[-\pi\underbrace{\cos\pi}_{-1} - (-0\cdot\underbrace{\cos 0}_{1})\Big] + \Big[\underbrace{\sin\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\Big] = \pi + 0 = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\mathbf{B} = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**

$$= \Big[-\underbrace{\cos\pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1})\Big] = \underline{\underline{2}}$$

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)}\cdot[\sin^2 x - 0^2]\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{rl} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x & |\cdot(-1) \\ \hline\hline 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x & \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (x+1)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (x+1)\cdot(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi \Big(x + 1 - \underbrace{x\cos 2x}_{\mathrm{C}=\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x} - \underbrace{\cos 2x}_{2x=w}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + x - \mathrm{C} - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{x\sin 2x + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi =$$

primitivní funkce jsou na intervalu integrace **spojité**

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{1}{2}\pi\underbrace{\sin 2\pi}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\pi}_{0} - \left(0 + 0 - 0 + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{1} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2 + 2\pi}{8}$$

$$\mathbf{C} = \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \cos 2x \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot x\sin 2x - \int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} 2x = w \\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}w \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x\sin 2x - \int \sin w\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\cdot x\sin 2x - \frac{1}{2}(-\cos w) + c = \frac{x\sin 2x + \cos 2x}{2} + c$$

$$S_y(\mathcal{A}) = \int_0^{\pi} \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)}\cdot x\cdot[\sin x - 0]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(x^2+x).\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^2+x & v' = \sin x \\ u' = 2x+1 & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= \left[(x^2+x)\cdot(-\cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2x+1)\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-(x^2+x)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = 2x+1 & v' = \cos x \\ u' = 2 & v = \sin x \end{vmatrix}$$

$$= \left[-(x^2+x)\cos x\right]_0^{\pi} + [(2x+1)\cdot\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-(x^2+x)\cos x\right]_0^{\pi} + [(2x+1)\sin x]_0^{\pi} - 2[-\cos x]_0^{\pi} =$$ primitivní funkce jsou na intervalu integrace **spojité**

$$= \left[-(\pi^2+\pi)\underbrace{\cos\pi}_{-1} + (0^2+0)\underbrace{\cos 0}_{1}\right] + \left[(2\pi+1)\underbrace{\sin\pi}_{0} - (2\cdot 0+1)\underbrace{\sin 0}_{0}\right] -$$

$$-2\left[-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}\right] = \pi^2 + \pi - 4$$

$$T = \left[\frac{\pi^2+\pi-4}{\pi+2}\,;\frac{\frac{\pi^2+2\pi}{8}}{\pi+2}\right] \doteq [1{,}75\,;0{,}39]$$

Hmotnost tenké *homogenní* rovinné desky $\mathcal{A}$ (jejíž každý bod je v ***polárních souřadnicích*** vyjádřen svou **vzdáleností** r od počátku a orientovaným **úhlem** φ , který svírá jeho průvodič s kladným směrem osy x)

o plošné (měrné) hustotě ϱ $[\mathrm{kg.m^{-2}}]$, kde $r(\varphi)$ je spojitá funkce a $\varphi \in \langle \alpha\,;\beta \rangle$, se spočítá podle vzorce (str. 30 zmíněných skript)

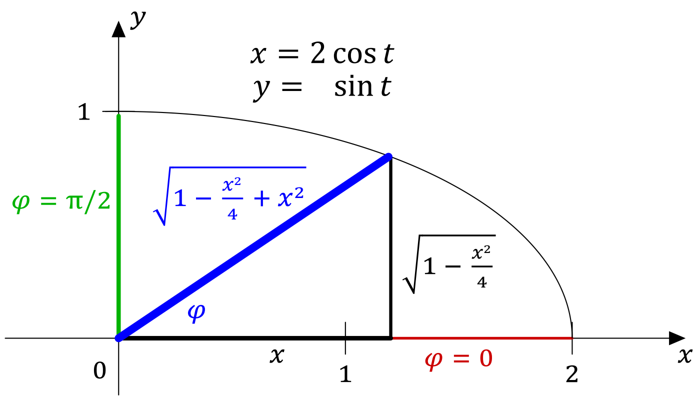
$$m(\mathcal{A}) = \frac{\varrho}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

Určete hmotnost tenké *homogenní* rovinné desky $\mathcal{A}$ jejíž každý bod vyhovuje vztahům

$$\mathcal{A} = \left\{ [x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 2\cos t\,,\ \ 0 \le y \le \sin t\,,\ \ t \in \left\langle 0\,; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\} ,$$

jestliže $\varrho = 1$ $[\mathrm{kg.m^{-2}}]$ (rovinná deska je stejná jako na str. 6).

Nakreslíme si hranice dané plochy, přičemž hraniční křivka je zadána parametricky:



Na straně 6 jsme odvodili:

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \qquad \text{Pak:}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{4}}} = \frac{2x}{\sqrt{4 + 3x^2}}$$

Polární souřadná soustava. Nejprve z parametrických rovnic elipsy sestavíme ***funkci*** **vzdálenosti** daného bodu elipsy od počátku v závislosti na orientovaném úhlu φ průvodiče (spojnice tohoto bodu s počátkem soustavy souřadnic), kde $\varphi \in \langle 0\,; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Tuto funkci vzdálenosti označíme $r(\varphi)$ a pro její sestavení využijeme znázorněný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém si vyjádříme funkci $\cos\varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{2x}{\sqrt{4+3x^2}} \qquad |^2$$

$$\cos^2\varphi = \frac{4x^2}{4+3x^2}$$

$$(4+3x^2)\cos^2\varphi = 4x^2$$

$$4\cos^2\varphi = 4x^2 - 3x^2\cos^2\varphi$$

$$\frac{4\cos^2\varphi}{4-3\cos^2\varphi} = x^2$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1+\frac{3x^2}{4}}$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1+\frac{3\cdot\frac{4\cos^2\varphi}{4-3\cos^2\varphi}}{4}}$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1+\frac{3\cos^2\varphi}{4-3\cos^2\varphi}} = \sqrt{\frac{4}{4-3\cos^2\varphi}}$$

$$m(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{1}_{\varrho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{4}{4-3\cos^2\varphi}}\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{4-3\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \left|\begin{array}{c} \operatorname{tg}\varphi = w \\ \varphi = \operatorname{arctg} w \\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{1+w^2}\,\mathrm{d}w \\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} \end{array}\right| =$$

$$= \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{2}{4-3\cdot\frac{1}{1+w^2}}\cdot\frac{1}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{2}{4w^2+1}\,\mathrm{d}w = \left|\begin{array}{c} \sqrt{4}w = \sqrt{1}s \\ w = \frac{s}{2} \\ \mathrm{d}w = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}s \end{array}\right| =$$

$$= \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{2}{4\cdot\frac{s^2}{4}+1}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s = \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = \Big[\operatorname{arctg} s\Big]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \Big[\operatorname{arctg} 2w\Big]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \Big[\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \begin{array}{c}\text{primitivní fun-}\\ \text{kce je } \textbf{\textit{spojitá}} \\ \text{na } \left\langle 0\,;\frac{\pi}{2}\right)\end{array} = \left[\lim_{x\to\pi/2^-}\operatorname{arctg}(2\underbrace{\operatorname{tg}x}_{\infty}) - \operatorname{arctg}(2\underbrace{\operatorname{tg}0}_{0})\right] =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ \mathrm{j}}}$$