Ústav matematiky a deskriptivní geometrie

INTEGRÁLY

primitivní funkce, určitý integrál, vlastnosti, vzorce

Studijní materiály

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Vlastnosti integrálů

K funkci $\boldsymbol{f(x)}$, která je ***spojitá*** na intervalu $(a;b)$, ***existuje*** na tomto intervalu primitivní funkce $\boldsymbol{F(x)}$ a tedy neurčitý integrál: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Platí:

$$\int [a\cdot f(x)+b\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = a\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pokud $\boldsymbol{c}$ je konstanta ($\Rightarrow$ libovolné reálné číslo), píšeme:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c$$

Je-li $F(x)$ *primitivní funkce k funkci $f(x)$* **spojitá** v $\langle a;b\rangle$, potom určitý integrál vypočítáme:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) \overset{\text{spoj. v }(a;b)}{=} \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$a\le c\le b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c\,, \quad \boxed{\text{kde } \boldsymbol{c} \text{ je konstanta}}$$

$$\int \mathrm{d}x = x + c$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c\,, \quad \text{pro } x \neq 0$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c\,, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

$$f(x) \neq 0$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg} x + c\,,\ \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + c\,,\ \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arcsin} x + c$$

$$x \in (-1\,;1)$$

Metoda „PER PARTES“

$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \qquad \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$

Integrování parciálních zlomků

$a, p, q, A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Reálný (jednonásobný) kořen

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A \cdot \ln|x-a| + c\,, \quad \text{pro } x \neq a$$

Reálný kořen s násobností *n* > 1

$$\int \frac{B}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + c\,, \quad \text{pro } x \neq a$$

Komplexně sdružené (jednonásobné) kořeny: $p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{C \cdot x + D}{x^2 + p \cdot x + q} \,\mathrm{d}x = \frac{C}{2} \cdot \ln(x^2 + p \cdot x + q) + \frac{2D - Cp}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \mathrm{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$$

Komplexně sdružené kořeny $(p^2 - 4q < 0)$ **s násobností** $\boldsymbol{n} > 1$

$$\int \frac{E \cdot x + F}{(x^2 + p \cdot x + q)^n} \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{(2F - Ep) \cdot x + Fp - 2Eq}{(n-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}} + $$

$$+ \frac{(2n-3)(2F - Ep)}{(n-1)(4q - p^2)} \cdot \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} \,\mathrm{d}x + c$$