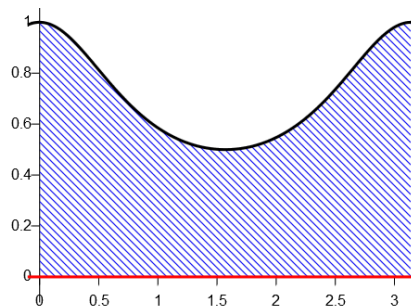


Určete plošný obsah části roviny omezené

funkcí $\frac{1}{1 + \sin^2 x}$

a **osou** x ,

pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$,



když víte, že:

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c$$

Správnost primitivní funkce si můžete ověřit DERIVOVÁNÍM!

1. Nekorektní použití základní věty integrálního počtu ¹

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \underbrace{\operatorname{tg} \pi}_0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} 0)}_0 = \\ &= 0 - 0 = 0 \text{ j}^2 \end{aligned}$$

Ovšem! Tento plošný obsah (**šrafovaný**) není (viz obrázek) roven NULE!

2. Primitivní funkce je nespojitá ² pro $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right] + \\ &\quad + \left[\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} a - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_0 + \operatorname{arctg} 0 - \lim_{b \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} b \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2,22 \text{ j}^2 \end{aligned}$$

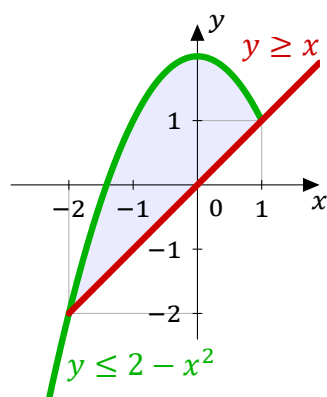
¹ Podle **Poznámky 2.3.** na straně 6 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Příbyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978--80--7204--525--9), musí být primitivní funkce na **uzavřeném** intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ **spojitá**, jinak nejsme oprávněni následující postup $\int_0^{\pi} f(x) dx = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$ použít.

² Nejdříve využijeme aditivnosti integrálu (v bodě nespojitosti jej rozdělíme na dva) a potom budeme postupovat podle **Definice 2.2.** tamtéž: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$

Plošný obsah části roviny $\mathcal{A} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\}$,
kde f_1, f_2 jsou spojité funkce takové, že $f_1(x) \leq f_2(x)$, pro každé $x \in (a; b)$,
se spočítá podle vzorce (str. 20 zmíněných skript):

$$P(\mathcal{A}) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{A}$, pro jejíž body platí: $y \leq 2 - x^2$; $y \geq x$.



1. Nakreslíme hranice oblasti: $y = 2 - x^2$, $y = x$
a z grafu určíme definiční obory funkcí.

2. Najdeme x -ové souřadnice průsečíků obou křivek

$$\begin{aligned} y &= y \\ x &= 2 - x^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

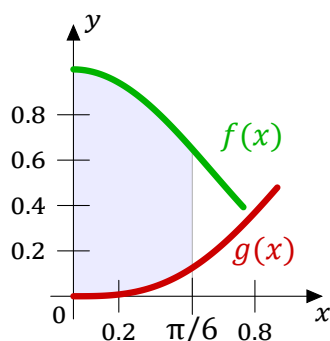
$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

3. Dosadíme do vzorce: $P(\mathcal{A}) = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx$

$$P(\mathcal{A}) = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - (x)] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \text{primitivní funkce je na intervalu integrace spojitá, proto:}$$

$$= \left[2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} \right] = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

**Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{B}$ ohraničené grafy funkcí $f : y = \cos^3 x$, $g : y = \sin^3 x$,
když $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ ($\pi/6 \doteq 0,524$)**



1. Nakreslíme hranice oblasti: $f(x) : y = \cos^3 x$,
 $g(x) : y = \sin^3 x$ a z grafu určíme definiční obory.

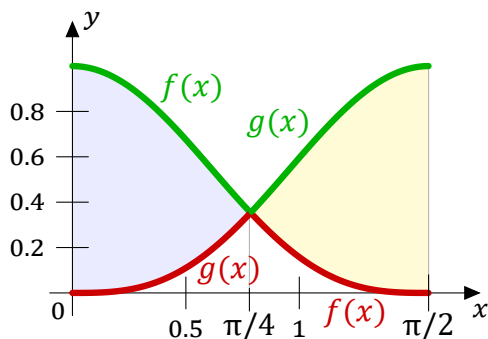
2. Najdeme x -ové souřadnice průsečíků obou křivek

$$\begin{aligned} y &= y \\ \cos^3 x &= \sin^3 x \\ \cos x &= \sin x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \doteq 0,524$$

3. Dosadíme do vzorce: $P(\mathcal{B}) = \int_0^{\pi/6} [f(x) - g(x)] dx$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{B}) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} [(\cos^3 x) - (\sin^3 x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \cdot \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = u & \cos x = v \\ \cos x dx = du & -\sin x dx = dv \\ \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - u^2) du + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1 - v^2) dv = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[v - \frac{v^3}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \text{primitivní funkce je} \\
&\quad \text{na intervalu integrace} \\
&\quad \textbf{spojitá, proto:} \\
&= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} \right) - (0) \right] + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}^3}{2^3 \cdot 3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8 \cdot 3} - 1 + \frac{1}{3} = \\
&\quad = \frac{12 - 1 - 24 + 8}{24} + \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{24} \doteq \mathbf{0,441} \text{ j}^2
\end{aligned}$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{C}$ ohraničené grafy funkcí $f : y = \cos^3 x$, $g : y = \sin^3 x$, když $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ($\pi/2 \doteq 1,57$), tedy stejné funkce jako v předchozím příkladu, ale jiný interval.



Na základě rozboru předchozího příkladu musíme uvažovat dvě části plochy $\mathcal{A}$ (modře vybarvená je levá část uvažované plochy a žlutě pravá část) a proto dosazujeme:

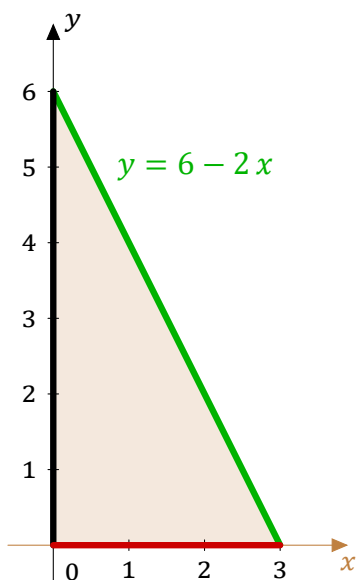
$$\begin{array}{lll}
\cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\
\sin 0 = 0 & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{2} = 1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{C}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\cos^3 x) - (\sin^3 x)] dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [(\sin^3 x) - (\cos^3 x)] dx = \\
&= \left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - u^2) du + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - v^2) dv \right] + \left[\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 (v^2 - 1) dv + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (u^2 - 1) du \right] = \\
&= \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[v - \frac{v^3}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{v^3}{3} - v \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 + \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \text{primitivní funkce je} \\
&\quad \text{na intervalu integrace} \\
&\quad \textbf{spojitá, proto:} \\
&\quad \dots = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} \doteq \mathbf{1,024} \text{ j}^2
\end{aligned}$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{D}$, pro jejíž body platí: $2x + y \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

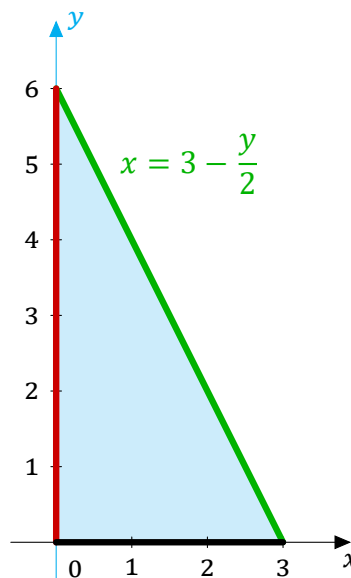
Máme **dvě** možnosti, jak stanovit podmínky, kterým musejí vyhovovat souřadnice bodů uvažované oblasti $\mathcal{D}$.

1. možnost: $0 \leq x \leq 3$
 $0 \leq y(x) \leq 6 - 2x$



$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}) &= \int_0^3 [(6 - 2x) - (0)] dx = \\ &= [6x - x^2]_0^3 = (6 \cdot 3 - 3^2) - (6 \cdot 0 - 0^2) = \\ &= 18 - 9 = 9 \text{ j}^2 \end{aligned}$$

2. možnost: $0 \leq y \leq 6$
 $0 \leq x(y) \leq 3 - \frac{y}{2}$



$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}) &= \int_0^6 [(3 - \frac{y}{2}) - (0)] dy = \\ &= \left[3y - \frac{y^2}{4} \right]_0^6 = (18 - 9) - (0) = 9 \text{ j}^2 \end{aligned}$$

V obou případech jsou primitivní funkce na intervalu integrace **spojité**.

Délka křivky $\mathcal{L}$ dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle a; b \rangle$ se spočítá podle vzorce (str. 18 zmíněných skript):

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

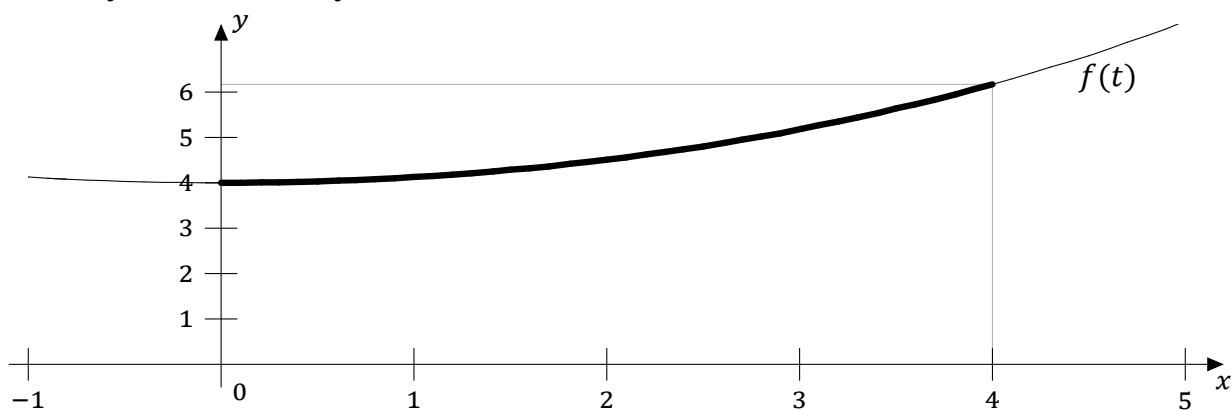
a ve speciálním případě, je-li křivka $\mathcal{L}$ dána předpisem $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ a derivace f' je konečná na $\langle a; b \rangle$, platí (str. 19 tamtéž):

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

protože za jednu parametrickou rovnici stačí zvolit: $x = t$ a dostaneme první případ.

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicemi: $x = 4 \ln t$; $y = 2t + \frac{2}{t}$, kde $t \in \langle 1; e \rangle$.
Potom (definiční obor funkce definující křivku určíme graficky)

$$x' = \frac{4}{t} \quad \text{a} \quad y' = 2 - \frac{2}{t^2}:$$

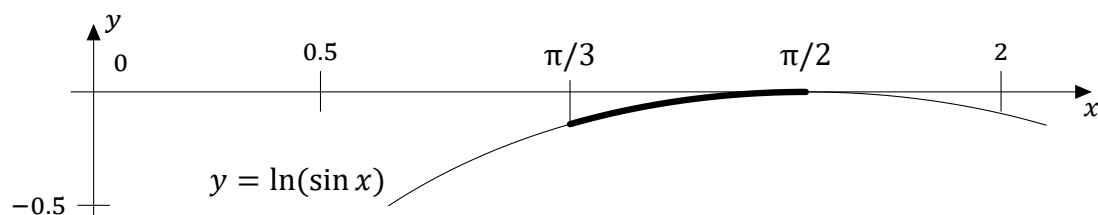


$$\mathcal{L} = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{4}{t}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{t^2}\right)^2} dt = \int_1^e \sqrt{\frac{16}{t^2} + 4 - \frac{8}{t^2} + \frac{4}{t^4}} dt = \int_1^e \sqrt{\left(2 + \frac{2}{t^2}\right)^2} dt =$$

$$= \int_1^e \left(2 + \frac{2}{t^2}\right) dt = \left[2t - \frac{2}{t}\right]_1^e = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce je} \\ \text{na intervalu integrace} \\ \text{spojitá, proto:} \end{array} = \left(2e - \frac{2}{e}\right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{2}{1}\right) \doteq$$

$$\doteq 4,701 \text{ j}$$

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicí: $f(x) : y = \ln(\sin x)$, kde $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Potom:



$$\begin{aligned}
 \underbrace{D(f) = (0; \pi)}_{\text{periodicky}}, \quad y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x &\Rightarrow \mathcal{L} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c|c} \cos x = y \\ -\sin x dx = dy \\ \hline x & y \\ \hline \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-1}{1 - y^2} dy = \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1} \right) dy = \left[-\frac{1}{2} \ln(y+1) + \frac{1}{2} \ln|y-1| \right]_{\frac{1}{2}}^0 =
 \end{aligned}$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= \left[-\frac{1}{2} \underbrace{\ln(0+1)}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\ln|0-1|}_0 \right] - \left[-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1}{2}-1\right| \right] = \dots = \frac{\ln 3}{2} \doteq \mathbf{0,55 \text{ j}}$$

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicí: $f(x) : y = \sqrt{6x - x^2}$.³

Je zřejmé, že: $y \geq 0$; $0 \leq x \leq 6$.

Zvolme (x zvolíme, y dopočítáme) parametrické rovnice

$$\begin{aligned}
 x &= t + 3 & x' &= 1 \\
 y &= \sqrt{9 - t^2} & y' &= \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \\
 & -3 \leq t \leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \int_{-3}^3 \sqrt{12 + \left(\frac{-t}{\sqrt{9-t^2}}\right)^2} dt = \int_{-3}^3 \sqrt{\frac{9-t^2+t^2}{9-t^2}} dt = \left| \begin{array}{c|c} t = 3w \\ dt = 3dw \\ \hline t & w \\ \hline 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{9}{9(1-w^2)}} 3 dw = \\
 &= 3 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{9}{9-9w^2}} dw = 3 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-w^2}} dw = 3 \left[\arcsin w \right]_{-1}^1 = 3 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 3\pi \text{ j}
 \end{aligned}$$

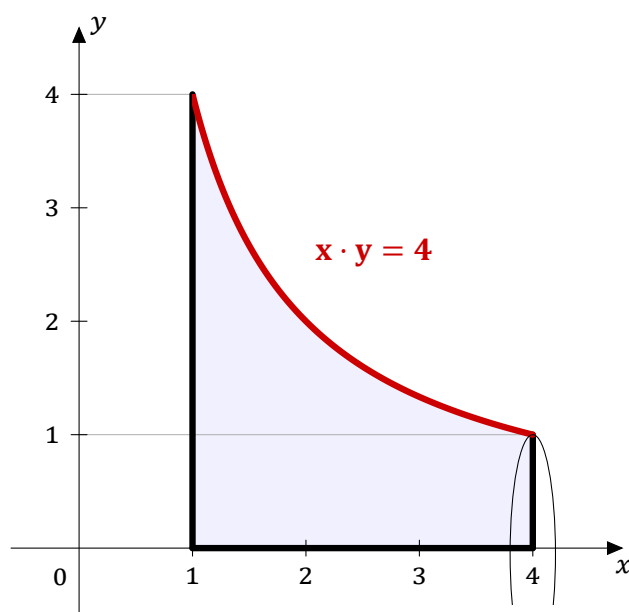
³ Graf funkce $f(x)$ je horní polokružnice $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$.

Objem $\mathcal{V}$ tělesa $\mathcal{T}$ vzniklého rotací funkce $f(x)$ kolem osy x pro které platí: rotující plocha je tvořena body $\{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$, kde f je spojitá na $(a; b)$ se spočítá podle vzorce (str. 23 zmíněných skript):

$$\mathcal{V}_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Obdobně při rotaci kolem osy y .

Určete objem $\mathcal{V}$ tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené čarami o rovnicích $x \cdot y = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ kolem osy x :



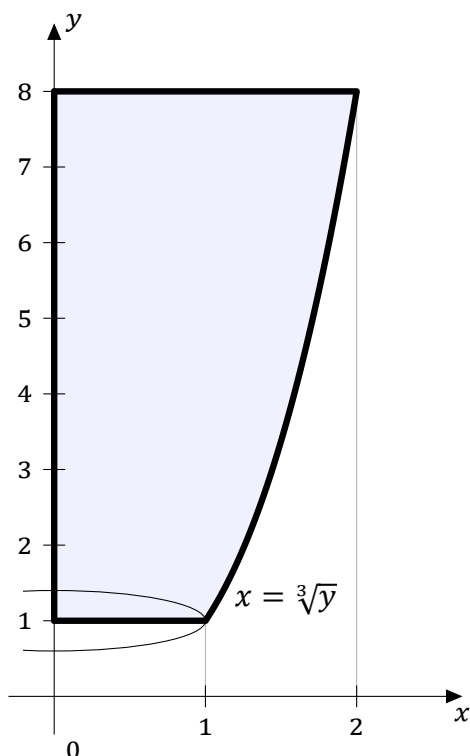
1. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z grafu určíme definiční obor funkce:

$$f(x) : y = \frac{4}{x}$$

2. Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_x &= \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = \pi \left[\frac{-16}{x} \right]_1^4 = \text{primitivní funkce je} \\ &\quad \text{na intervalu integrace} = \text{spojitá, proto:} \\ &= \pi \left[\frac{-16}{4} - \left(\frac{-16}{1} \right) \right] = \pi (-4 + 16) = 12\pi \end{aligned}$$

Určete objem $\mathcal{V}$ tělesa vzniklého rotací oblouku křivky $y = x^3$ kolem osy y pro $y \in \langle 1; 8 \rangle$.



1. Pozor na PÍSMENKA označující proměnné, plocha rotuje kolem osy y !
2. $x^3 = y \Rightarrow f(y) : x = \sqrt[3]{y}, \quad D(f) = \mathbb{R}$
3. V rovině si nakreslíme rotující plochu
4. Dosadíme do vzorce pro objem:

$$\mathcal{V}_y = \pi \int_1^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_1^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^8 = \text{primitivní funkce je na intervalu integrace spojitá, proto:}$$

$$= \pi \left(\frac{3}{5} \cdot 8^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{5} \cdot 1^{\frac{5}{3}} \right) = \pi \left(\frac{3 \cdot 32}{5} - \frac{3}{5} \right) = \frac{93\pi}{5} \text{ j}^3 \doteq \underline{\underline{58,43 \text{ j}^3}}$$

Plášť $\mathcal{P}$ tělesa $\mathcal{T}$ vzniklého rotací funkce $f(x)$ kolem osy x pro které platí: rotující plocha je tvořena body $\{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$, a f' je konečná na $(a; b)$, se spočítá podle vzorce (str. 25 zmíněných skript):

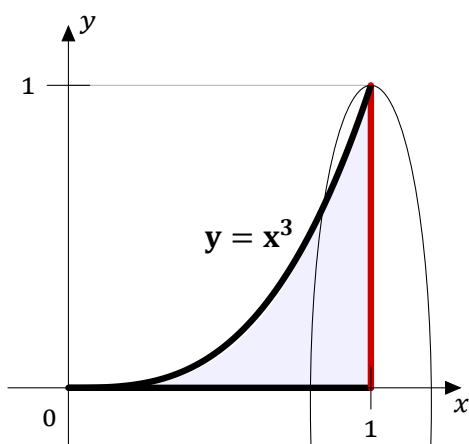
$$\mathcal{P}_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

a v případě, že body křivky jsou dány parametricky $[x(t); y(t)]$ a $y(t) \geq 0$ pro $t \in (\alpha; \beta)$

$$\mathcal{P}_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Obdobně při rotaci kolem osy y .

Určete povrch P tělesa vzniklého rotací oblouku křivky $f(x) : y = x^3$ kolem osy x pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$.



1. $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$
2. V rovině si nakreslíme rotující plochu
3. Povrch je tvořen pláštěm a podstavami:
 $P = \mathcal{P}_x + P_1 + P_2$
 P_1 je pouze bod a P_2 je kruh o poloměru 1.
4. Dosadíme do vzorce pro plášť:

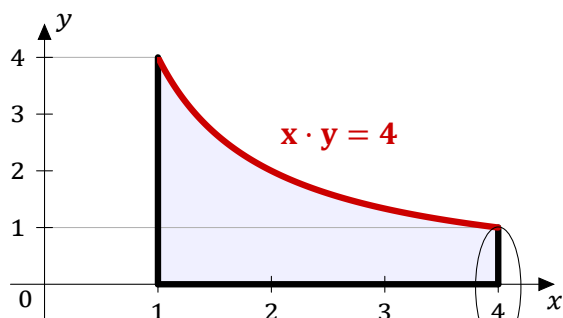
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + 9x^4} = t \\ 1 + 9x^4 = t^2 \\ 36x^3 dx = 2t dt \\ x^3 dx = \frac{t}{18} dt \\ \hline \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & \sqrt{10} \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \cdot \frac{t}{18} dt = 2\pi \left[\frac{t^3}{54} \right]_1^{\sqrt{10}} = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce je} \\ \text{na intervalu integrace} \\ \text{spojitá, proto:} \end{array} = 2\pi \left[\frac{(\sqrt{10})^3}{54} - \frac{1^3}{54} \right] = \\ &\doteq 2\pi \cdot (0,567) \doteq \mathbf{3,563 j^2} \end{aligned}$$

Zbývá ještě k plášti přičíst plochu (červené) podstavy, abychom dostali celý povrch rotačního tělesa.

$$P = \mathcal{P}_x + \pi \cdot 1^2 = 2\pi \cdot (0,567) + \pi = \pi \cdot (2 \cdot 0,567 + 1) \doteq \mathbf{6,723 j^2}$$

Určete plášť $\mathcal{P}$ tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené čarami o rovnicích

$x \cdot y = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ kolem osy x :



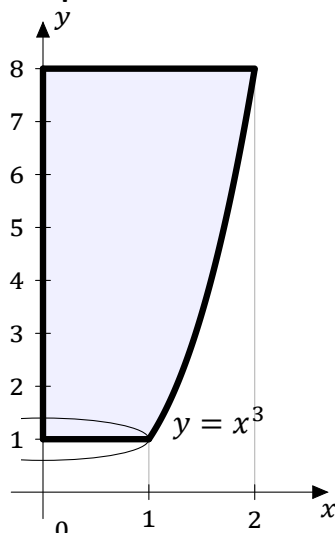
1. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z grafu určíme definiční obor funkce:

$$f(x) : y = \frac{4}{x}$$

2. Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= 2\pi \int_1^4 \frac{4}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-4}{x^2}\right)^2} dx = 8\pi \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = t \\ 1 + \frac{16}{x^4} = t^2 \\ \frac{16}{t^2 - 1} = x^4 \\ \frac{-16 \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} dt = 4x^3 dx \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 4 & \sqrt{\frac{17}{16}} \\ 1 & \sqrt{17} \end{array} \end{array} \right| = \\ &= 8\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{x} \cdot t \cdot \frac{1}{4x^3} \cdot \frac{-16 \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} dt = -64\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = \\ &= -64\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{\frac{16}{t^2 - 1}} \cdot \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = -4\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -4\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \\ &= -4\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \left(1 + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right) dt = 2\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \left(-2 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{\frac{17}{16}}}^{\sqrt{17}} \left(2 - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right) dt = 2\pi \left[2t + \ln \frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{\frac{17}{16}}}^{\sqrt{17}} = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce je} \\ \text{na intervalu integrace} \\ \textbf{spojitá, proto:} \end{array} \\ &= 2\pi \left[2\sqrt{17} + \ln \frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1} - \left(2\sqrt{\frac{17}{16}} + \ln \frac{\sqrt{\frac{17}{16}}-1}{\sqrt{\frac{17}{16}}+1}\right)\right] \doteq 2\pi \cdot (9,879) \doteq \mathbf{62,073 \, j^2} \end{aligned}$$

Určete plášť $\mathcal{P}$ tělesa vzniklého rotací oblouku křivky $y = x^3$ kolem osy y pro $y \in \langle 1; 8 \rangle$.



1. Pozor na PÍSMENKA – plocha určená křivkou rotuje kolem osy y !
2. Zvolíme si parametrické vyjádření křivky, například:

$$x^3 = y \Rightarrow x = t ; \quad x' = 1 \quad t \in \langle 1; 2 \rangle$$

$$y = t^3 ; \quad y' = 3t^2$$
3. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z obrázku odvodíme, zda definiční obor křivky pokrývá celý interval, přes který integrujeme.
4. Dosadíme do vzorce pro plášť.

$$\mathcal{P}_y = 2\pi \int_1^2 t \cdot \sqrt{1^2 + (3t^2)^2} dt = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + 9t^4} \cdot \underbrace{t dt}_{\substack{1 + 9t^4 = u \\ t^4 = \frac{u-1}{9} \Rightarrow t^2 = \sqrt{\frac{u-1}{9}} \\ 4t^3 dt = \frac{1}{9} du \\ t dt = \frac{1}{36t^2} du \\ t = 2 \Rightarrow u = 145 \\ t = 1 \Rightarrow u = 10}} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{u}{u-1}} = v \\ u = v^2(u-1) \\ v^2 = u(v^2-1) \\ \frac{v^2}{v^2-1} = u \\ \frac{2v(v^2-1)-v^2 \cdot 2v}{(v^2-1)^2} dv = du \\ u = 145 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{145}{144}} \\ u = 10 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{9}} \end{array} \right|$$

$$= 2\pi \int_{10}^{145} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{36 \cdot \sqrt{\frac{u-1}{9}}} du = \frac{\pi}{6} \int_{10}^{145} \sqrt{\frac{u}{u-1}} du =$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{\sqrt{\frac{10}{9}}}^{\sqrt{\frac{145}{144}}} v \cdot \frac{-2v}{(v^2-1)^2} dv = \frac{\pi}{3} \int_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \frac{v^2}{(v^2-1)^2} dv =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \left[\frac{-\frac{1}{4}}{v+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(v+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{v-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(v-1)^2} \right] dv =$$

$$\frac{\pi}{12} \cdot \left[\ln \frac{v-1}{v+1} - \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v-1} \right] \Big|_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \doteq 71,4 \text{ j}^2$$

kde: $\frac{v^2}{(v^2-1)^2} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{(v+1)^2} + \frac{C}{v-1} + \frac{D}{(v-1)^2}$

$$v^2 = A(v+1)(v-1)^2 + B(v-1)^2 + C(v-1)(v+1)^2 + D(v+1)^2$$

$$v = 1 : 1 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$v = -1 : 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$v^3 : 0 = A + C \Rightarrow A = -C$$

$$v = 0 : 0 = A + B - C + D$$

$$0 = A + \frac{1}{4} + A + \frac{1}{4} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$