

# Funkce více proměnných

Vyjadřuje-li rovnice  $F(x, y, z) = 0$  v bodě  $\mathcal{A}$  implicitně nějakou funkci (která popisuje plochu), pak normálový vektor k této ploše v bodě  $\mathcal{A}$  má tvar

$$\vec{n} = (F_x(\mathcal{A}); F_y(\mathcal{A}); F_z(\mathcal{A}))$$

1.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $A$  o půdorysu  $A_1 = [1; -2]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce

$$f(x, y) : z = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^3.$$

Napřed dopočítáme  $z$ -tovou souřadnici bodu,

$$z = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (1)^3 - 3 \cdot (-2)^3 = 46 \quad \Rightarrow \quad A = [1; -2; 46]$$

potom funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : 6xy^2 - 2x^3 - 3y^3 - z = 0$$

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $A$  spojité a navíc hodnota  $F_z(A) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě k ploše (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{array}{ll} F_x = 6y^2 - 6x^2 & F_x(A) = 18 \\ F_y = 12xy - 9y^2 & F_y(A) = -60 \\ F_z = -1 & F_z(A) = -1 \neq 0 \end{array} \quad \text{normálový vektor} \quad \vec{n} = (18; -60; -1)$$

**Parametrické rovnice normály:**

$$\begin{aligned} x &= 1 + 18p \\ y &= -2 - 60p \\ z &= 46 - p \end{aligned}$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $18 \cdot (x - 1) - 60 \cdot (y + 2) - 1 \cdot (z - 46) = 0$

$$18x - 60y - z - 92 = 0$$

2.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $B = [-1; y_B; 5]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce když souřadnice  $y_B > 0$ .

$$f(x, y) : z = x^2 + y^2.$$

Napřed dopočítáme  $y$ -novou souřadnici bodu,

$$5 = (-1)^2 + y^2 \quad \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow B = [-1; 2; 5]$$

potom funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : x^2 + y^2 - z = 0$$

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $B$  spojité a navíc hodnota  $F_z(B) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{array}{lll} F_x = 2x & F_x(B) = -2 & \\ F_y = 2y & F_y(B) = 4 & \text{normálový vektor } \vec{n} = (-2; 4; -1) \\ F_z = -1 & F_z(B) = -1 \neq 0 & \end{array}$$

**Parametrické rovnice normály:**

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2p \\ y &= 2 + 4p \\ z &= 5 - p \end{aligned}$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $-2 \cdot (x + 1) + 4 \cdot (y - 2) - 1 \cdot (z - 5) = 0$

$$2x - 4y + z + 5 = 0$$

3.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $C = [3; 1; ?]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu)

$$F(x, y, z) : x^2 - y^2 - 4z = 0.$$

Napřed dopočítáme  $z$ -tovou souřadnici bodu,

$$(3)^2 - (1)^2 - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad C = [3; 1; 2]$$

a potom spočítáme první **parciální derivace**.

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $C$  spojité a navíc hodnota  $F_z(C) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{array}{lll} F_x = 2x & F_x(C) = 6 & \\ F_y = -2y & F_y(C) = -2 & \text{normálový vektor } \vec{n} = (6; -2; -4) = 2 \cdot (3; -1; -2) \\ F_z = -4 & F_z(C) = -4 \neq 0 & \end{array}$$

**Parametrické rovnice normály:**

$$\begin{aligned} x &= 3 + 3p \\ y &= 1 - p \\ z &= 2 - 2p \end{aligned}$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $3 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z - 2) = 0$

$$3x - y - 2z - 4 = 0$$

4.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $D = [1; -1; 1]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 - xyz.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 2 - (1) \cdot (-1) \cdot (1) \Rightarrow \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 2 = 0$$

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $D$  spojité a navíc hodnota  $F_z(D) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{array}{llll} F_x = 2x + yz & F_x(D) = 1 & & \\ F_y = 2y + xz & F_y(D) = -1 & \text{normálový vektor} & \vec{n} = (1; -1; 1) \\ F_z = 2z + xy & F_z(D) = 1 \neq 0 & & \end{array}$$

**Parametrické rovnice normály:**

$$\begin{aligned} x &= 1 + p \\ y &= -1 - p \\ z &= 1 + p \end{aligned}$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

$$x - y + z - 3 = 0$$

5.  $[x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $E = [1; 1; -1]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$F(x, y, z) : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + z^3 + xyz = 0.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + (-1)^3 + (1) \cdot (1) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**.

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $E$  spojité a navíc hodnota  $F_z(E) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{y} + \frac{-y}{x^2} + yz & F_x(E) &= -1 \\ F_y &= \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{x} + xz & F_y(E) &= -1 \\ F_z &= 3z^2 + xy & F_z(E) &= 4 \neq 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{normálový vektor} \\ \vec{n} = (-1; -1; 4) \end{array}$$

**Parametrické rovnice normály:**

$$\begin{aligned} x &= 1 - p \\ y &= 1 - p \\ z &= -1 + 4p \end{aligned}$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $-1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 4 \cdot (z + 1) = 0$

$$x + y - 4z - 6 = 0$$

6.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$  V bodě  $G = [-1; 3; -9]$  napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$xyz = 27.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$(-1) \cdot (3) \cdot (-9) = 27 \Rightarrow \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : xyz - 27 = 0$$

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $G$  spojité a navíc hodnota  $F_z(G) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = yz \quad F_x(G) = -27$$

$$F_y = xz \quad F_y(G) = 9$$

$$F_z = xy \quad F_z(G) = -3 \neq 0$$

$$\text{normálový vektor} \quad \vec{n} = -3 \cdot (9; -3; 1)$$

$$\text{Parametrické rovnice normály:} \quad x = -1 + 9p$$

$$y = 3 - 3p$$

$$z = -9 + p$$

$$\text{Obecná rovnice tečné roviny:} \quad 9 \cdot (x + 1) - 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z + 9) = 0$$

$$9x - 3y + z + 27 = 0$$

7.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ 

V bodě  $H = [2; 3; 4]$  napište (pokud existují)  
rovnice tečné roviny a normály plochy  
(pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 27 = 0.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$\underbrace{2^3}_8 + \underbrace{3^3}_{27} + \underbrace{4^3}_{64} - \underbrace{3 \cdot (2) \cdot (3) \cdot (4)}_{72} - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**.

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $H$  spojité a navíc hodnota  $F_z(H) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = 3x^2 - 3yz \quad F_x(H) = -24$$

$$F_y = 3y^2 - 3xz \quad F_y(H) = 3$$

$$F_z = 3z^2 - 3xy \quad F_z(H) = 30 \neq 0$$

$$\text{normálový vektor} \quad \vec{n} = -3 \cdot (8; -1; -10)$$

$$\text{Parametrické rovnice normály:} \quad x = 2 + 8p$$

$$y = 3 - p$$

$$z = 4 - 10p$$

$$\text{Obecná rovnice tečné roviny:} \quad 8 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 3) - 10 \cdot (z - 4) = 0$$

$$8x - y - 10z + 27 = 0$$



8.  $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ 

V bodě  $L = [1; 0; 1]$  napište (pokud existují)  
rovnice tečné roviny a normály plochy  
(pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 - y^2 + z^2).$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$(1^2 + 0^2 + 1^2)^2 = 2(1^2 - 0^2 + 1^2) \Rightarrow \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$$

Pokud jsou všechny tři  $F_x, F_y, F_z$  v okolí bodu  $L$  spojité a navíc hodnota  $F_z(L) \neq 0$ , pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x - 4x \quad F_x(L) = 4$$

$$F_y = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2y + 4y \quad F_y(L) = 0 \quad \text{norm. vekt. } \vec{n} = 4 \cdot (1; 0; 1)$$

$$F_z = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2z - 4z \quad F_z(L) = 4 \neq 0$$

**Parametrické rovnice normály:**  $x = 1 + p$

$$y = 0$$

$$z = 1 + p$$

**Obecná rovnice tečné roviny:**  $1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

$$x + z - 2 = 0$$

9.  $[x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; z \in \mathbb{R}]$  Najděte rovnici tečné roviny  $\tau$  plochy

$$f(x, y) : z = \frac{1}{xy},$$

která je rovnoběžná s rovinou  $x + y + z - 8 = 0 \Rightarrow$  normálový vektor  $\vec{n} = (1; 1; 1)$ .

Funkci upravíme na tvar  $F(x; y; z) = 0$  a pro bod dotyku  $T = [x_T; y_T; z_T]$  spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : xyz - 1 = 0$$

$$F_x = yz \quad F_x(T) = 1$$

$$F_y = xz \quad F_y(T) = 1$$

$$F_z = xy \quad F_z(T) = 1$$

Řešením následujícího systému tří rovnic o třech neznámých:

$$y_T \cdot z_T = 1 \quad \Rightarrow \quad y_T = \frac{1}{z_T}$$

$$x_T \cdot z_T = 1 \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{1}{z_T}$$

$$x_T \cdot y_T = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_T} \cdot \frac{1}{z_T} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = z_T^2 \quad \Rightarrow \quad z_{T_{1,2}} = \pm 1$$

dostáváme dva možné body dotyku:  $T_1 = [1; 1; 1]$  a  $T_2 = [-1; -1; -1]$ .

Po dosazení souřadnic těchto bodů do rovnice plochy je zřejmé, že bod  $T_2$  na ploše neleží, kdežto bod  $T_1$  na ploše leží.

$$T_1 : 1 = \frac{1}{1 \cdot 1} \quad T_2 : -1 \neq \frac{1}{(-1) \cdot (-1)}$$

**Obecná rovnice tečné roviny  $\tau$  v bodě  $T_1$ :**  $(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 0$

$$x + y + z - 3 = 0$$