Funkce více proměnných

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Při určování lokálních extrémů reálné funkce dvou reálných proměnných $f(x;y)$ postupujeme zpravidla takto:

1. určíme definiční obor $D(f)$ funkce;
2. vypočteme první parciální derivace f_x , f_y a určíme jejich definiční obory;
3. určíme ***stacionární body*** (v nich jsou obě **první parciální derivace rovny NULE**);
4. vypočteme druhé parciální derivace f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} a f_{yy}

   — pokud jsou v bodě $\mathcal{S}$ spojité, platí: $f_{xy}(\mathcal{S}) = f_{yx}(\mathcal{S})$;
5. pro každý stacionární bod $\mathcal{S}$ určíme znaménko determinantu

   $$D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix}$$

   Když $D(\mathcal{A}) > 0$ pak $\mathcal{A}$ je lokální extrém;
   Když $D(\mathcal{B}) < 0$ pak $\mathcal{B}$ není lokální extrém;
   Když $D(\mathcal{C}) = 0$ pak o $\mathcal{C}$ nelze rozhodnout;
6. ze znaménka druhé derivace $f_{xx}(\mathcal{E})$ určíme druh extrému v daném bodě

   když $f_{xx}(\mathcal{M}) < 0$ pak v bodě $\mathcal{M}$ je (ostré) lokální **MAXIMUM**;
   když $f_{xx}(m) > 0$ pak v bodě m je (ostré) lokální **minimum**;
7. vyšetříme chování funkce ve stacionárních bodech, pro které má výše uvedený determinant nulovou hodnotu $D(\mathcal{S}) = 0$

   a v bodech, v nichž první parciální derivace f_x a f_y **neexistují.**

Nutná podmínka existence lokálních extrémů pro funkci více proměnných:

- první parciální derivace jsou rovny NULE

  nebo

- první parciální derivace neexistují

Dostatečná podmínka existence lokálního extrému v bodě $\mathcal{S}$ pro funkci

DVOU proměnných (determinant je kladný): $$D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix} > 0$$

Poznámka Reálná funkce více reálných proměnných může mít (*ale také nemusí*) ***lokální extrém pouze*** ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x > 0\,;\ y > 0$

2. první parciální derivace: $z_x = 2x + y - \frac{4}{x}$ $\quad z_y = x + 2y - \frac{10}{y}$

$\Longrightarrow \quad D(z_x) : x \neq 0\,, y \in \mathbb{R} \qquad D(z_y) : y \neq 0\,, x \in \mathbb{R}$

3. stacionární body:

$$2x + y - \frac{4}{x} = 0 \quad |\,.x \quad (\text{pro } {\color{red}x > 0})$$

$$x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \quad |\,.y \quad (\text{pro } {\color{red}y > 0})$$

$$2x^2 + xy - 4 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{4 - 2x^2}{x}$$

$$xy + 2y^2 - 10 = 0$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$x \cdot \frac{4 - 2x^2}{x} + 2 \cdot \left(\frac{4 - 2x^2}{x}\right)^2 - 10 = 0 \quad |\,.x^2 \quad (\text{pro } {\color{red}x > 0})$$

$$x^2 \cdot (4 - 2x^2) + 2 \cdot \left(16 - 16x^2 + 4x^4\right) - 10x^2 = 0$$

$$4x^2 - 2x^4 + 32 - 32x^2 + 8x^4 - 10x^2 = 0$$

$$6x^4 - 38x^2 + 32 = 0 \quad | : 2$$

$$3x^4 - 19x^2 + 16 = 0 \qquad \text{substituce } s = x^2$$

$$3s^2 - 19s + 16 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{6} = \frac{19 \pm 13}{6} \qquad s_1 = \frac{16}{3} \quad s_2 = 1$$

$$x_{1;1} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x_{1;2} = -\sqrt{\frac{16}{3}} \notin D(z) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$x_{2;1} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_{2;2} = -\sqrt{1} \notin D(z) \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1$$

$$y_1 = \frac{4 - 2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{4 - 2 \cdot \frac{16}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{12-32}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \notin D(z)$$

$$y_2 = \frac{4 - 2 \cdot 1^2}{1} = 2$$

Funkce má jediný stacionární bod $\mathcal{A} = [1\,;2]$.

4. druhé parciální derivace:

$z_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}$ $\qquad z_{xx}(\mathcal{A}) = 6$

$z_{xy} = 1$

$z_{yx} = 1$

$z_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}$ $\qquad z_{yy}(\mathcal{A}) = \frac{9}{2}$

5. determinant: $D(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 27 - 1 > 0$

V bodě $\mathcal{A}$ je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{A}) = 6 > 0$ $\Rightarrow$ v bodě $\mathcal{A}$ je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v $D(z)$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální minimum v bodě $\mathcal{A} = [1\,;2]$,

které má hodnotu $f(1\,;2) = 7 - 10 \cdot \ln 2 \doteq 0,07$.

2. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}\,;\; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = -y - 2x \qquad z_y = 6 - 2y - x$

$\Rightarrow \qquad D(z_x) : x \in \mathbb{R}\,,\; y \in \mathbb{R} \qquad D(z_y) : x \in \mathbb{R}\,,\; y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body:

$$\begin{array}{rl} -2x - y = 0 & \mid .(-2) \\ -x - 2y + 6 = 0 & \\ \hline 4x + 2y = 0 & \\ -x - 2y = -6 & \\ \hline 3x = -6 & \\ x = -2 & \end{array}$$

a po dosazení do první rovnice

$$\begin{array}{r} -2 \cdot (-2) - y = 0 \\ 4 = y \end{array}$$

Funkce má jediný stacionární bod $\mathcal{B} = [-2\,;4]$.

4. druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -2 \\ z_{xy} &= -1 \\ z_{yx} &= -1 \\ z_{yy} &= -2 \end{aligned}$$

5. determinant: $D(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě $\mathcal{B}$ je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{B}) = -2 < 0 \qquad \Rightarrow$ v bodě $\mathcal{B}$ je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

7. všude v $\mathbb{R}^2$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální maximum v bodě $\mathcal{B} = [-2\,;4]$,

které má hodnotu $f(-2\,;4) = 13$.

3. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 2x - y - 1$ $\quad z_y = 2y - x - 1$

$\Rightarrow \quad D(z_x) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R} \qquad D(z_y) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body:

$$
\begin{aligned}
2x - y - 1 &= 0 \\
2y - x - 1 &= 0 \quad |\,.2 \\
\hline
2x - y &= 1 \\
-2x + 4y &= 2 \\
\hline
3y &= 3 \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

a po dosazení do první rovnice

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &= 1 \\
2x &= 2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Funkce má jediný stacionární bod $C = [1\,;1]$.

4. druhé parciální derivace:

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= 2 \\
z_{xy} &= -1 \\
z_{yx} &= -1 \\
z_{yy} &= 2
\end{aligned}
$$

5. determinant: $D(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě C je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(C) = 2 > 0$ $\quad \Rightarrow$ v bodě C je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v $\mathbb{R}^2$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální minimum v bodě $C = [1\,;1]$,

které má hodnotu $f(1\,;1) = 1$.

4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = x^3 + y^3 - 18xy$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 3x^2 - 18y$ $z_y = 3y^2 - 18x$

$\Longrightarrow$ $D(z_x) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}$ $D(z_y) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body: $3x^2 - 18y = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{6}$

$3y^2 - 18x = 0$

a po dosazení do druhé rovnice

$$3 \cdot \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 18x = 0$$

$$x \cdot \left(x^3 - 12 \cdot 18\right) = 0$$

$$x \cdot \left[x^3 - (6 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 6)\right] = 0$$

$$x \cdot \left(x^3 - 6^3\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad \Rightarrow y_1 = 0$$

$$x_2 = 6 \qquad \Rightarrow y_2 = 6$$

Funkce má dva stacionární body $\mathcal{D} = [0\,;0]$ a $\mathcal{E} = [6\,;6]$.

4. druhé parciální derivace:

$z_{xx} = 6x$ $z_{xx}(\mathcal{D}) = 0$ $z_{xx}(\mathcal{E}) = 36$

$z_{xy} = -18$

$z_{yx} = -18$

$z_{yy} = 6y$ $z_{yy}(\mathcal{D}) = 0$ $z_{yy}(\mathcal{E}) = 36$

5. determinanty: $D(\mathcal{D}) = \begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-18)^2 < 0$

V bodě $\mathcal{D}$ není lokální extrém.

$$D(\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 36^2 - (-18)^2 > 0$$

V bodě $\mathcal{E}$ je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{E}) = 36 > 0$ $\Rightarrow$ v bodě $\mathcal{E}$ je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v $\mathbb{R}^2$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální minimum v bodě $\mathcal{E} = [6\,;6]$,

které má hodnotu $f(6\,;6) = -216$.

5. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 54xy - 54 \qquad z_y = 27x^2 + 42y^2 - 69$

$$\Rightarrow \qquad D(z_x) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R} \qquad D(z_y) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}$$

3. stacionární body:

$$54xy - 54 = 0 \quad | : 54$$
$$27x^2 + 42y^2 - 69 = 0 \quad | : 3$$

$$xy - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{y} \quad \text{pro } y \neq 0 \text{ (což je splněno)}$$
$$9x^2 + 14y^2 - 23 = 0$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$9 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 + 14y^2 - 23 = 0 \quad | \,.\, y^2 \quad (\text{pro } y \neq 0)$$
$$9 + 14y^4 - 23y^2 = 0 \qquad \text{substituce } s = y^2$$
$$14s^2 - 23s + 9 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 14 \cdot 9}}{2 \cdot 14} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{28} = \frac{23 \pm 5}{28} \qquad s_1 = 1 \qquad s_2 = \frac{9}{14}$$

$$y_{1;1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1;1} = 1$$
$$y_{1;2} = -1 \qquad\qquad x_{1;2} = -1$$

$$y_{2;1} = \sqrt{\frac{9}{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \qquad \Rightarrow \qquad x_{2;1} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$
$$y_{2;2} = -\sqrt{\frac{9}{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \qquad\qquad x_{2;2} = -\frac{\sqrt{14}}{3}$$

Funkce má čtyři stacionární body $\mathcal{G} = [1\,;1]$, $\mathcal{J} = [-1\,;-1]$, $\mathcal{K} = [\frac{\sqrt{14}}{3}\,;\frac{3\cdot\sqrt{14}}{14}]$ a $\mathcal{L} = [-\frac{\sqrt{14}}{3}\,;-\frac{3\cdot\sqrt{14}}{14}]$.

4. druhé parciální derivace:

$$z_{xx} = 54y$$
$$z_{xy} = 54x$$
$$z_{yx} = 54x$$
$$z_{yy} = 84y$$

$z_{xx}(\mathcal{G}) = 54$ $\quad z_{xx}(\mathcal{J}) = -54$ $\quad z_{xx}(\mathcal{K}) = \frac{81\cdot\sqrt{14}}{7}$ $\quad z_{xx}(\mathcal{L}) = -\frac{81\cdot\sqrt{14}}{7}$

$z_{xy}(\mathcal{G}) = 54$ $\quad z_{xy}(\mathcal{J}) = -54$ $\quad z_{xy}(\mathcal{K}) = 18\cdot\sqrt{14}$ $\quad z_{xy}(\mathcal{L}) = -18\cdot\sqrt{14}$

$z_{yx}(\mathcal{G}) = 54$ $\quad z_{yx}(\mathcal{J}) = -54$ $\quad z_{yx}(\mathcal{K}) = 18\cdot\sqrt{14}$ $\quad z_{yx}(\mathcal{L}) = -18\cdot\sqrt{14}$

$z_{yy}(\mathcal{G}) = 84$ $\quad z_{yy}(\mathcal{J}) = -84$ $\quad z_{yy}(\mathcal{K}) = 18\cdot\sqrt{14}$ $\quad z_{yy}(\mathcal{L}) = -18\cdot\sqrt{14}$

5. determinanty: $D(\mathcal{G}) = \begin{vmatrix} 54 & 54 \\ 54 & 84 \end{vmatrix} = 54\cdot 84 - 54\cdot 54 = 54\cdot(84-54) > 0$

V bodě $\mathcal{G}$ je lokální extrém.

$$D(\mathcal{J}) = \begin{vmatrix} -54 & -54 \\ -54 & -84 \end{vmatrix} = (-54)\cdot(-84) - (-54)\cdot(-54) = 54(84-54) > 0$$

V bodě $\mathcal{J}$ je lokální extrém.

$$D(\mathcal{K}) = \begin{vmatrix} \frac{81\cdot\sqrt{14}}{7} & 18\cdot\sqrt{14} \\ 18\cdot\sqrt{14} & 18\cdot\sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7}\cdot 18\cdot 14 - 18\cdot 18\cdot 14 = 18\cdot 14\cdot(\frac{81}{7} - 18) =$$

$$= 18\cdot 14\cdot\left(\frac{81-18\cdot 7}{7}\right) = 18\cdot 14\cdot\left(\frac{81-126}{7}\right) < 0$$

V bodě $\mathcal{K}$ NENÍ lokální extrém.

$$D(\mathcal{L}) = \begin{vmatrix} -\frac{81\cdot\sqrt{14}}{7} & -18\cdot\sqrt{14} \\ -18\cdot\sqrt{14} & -18\cdot\sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7}\cdot 18\cdot 14 - 18\cdot 18\cdot 14 = 18\cdot 14\cdot(\frac{81}{7} - 18) =$$

$$= 18\cdot 14\cdot\left(\frac{81-18\cdot 7}{7}\right) = 18\cdot 14\cdot\left(\frac{81-126}{7}\right) < 0$$

V bodě $\mathcal{L}$ NENÍ lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{G}) = 54 > 0$ $\Rightarrow$ v bodě $\mathcal{G}$ je (ostré) lokální **minimum**.

$z_{xx}(\mathcal{J}) = -54 < 0$ $\Rightarrow$ v bodě $\mathcal{J}$ je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

7. všude v $D(z)$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediné dva lokální extrémy dané funkce, a to

lokální minimum v bodě $\mathcal{G} = [1\,;1]$,

které má hodnotu $f(1\,;1) = -82$ a

lokální maximum v bodě $\mathcal{J} = [-1\,;-1]$,

které má hodnotu $f(-1\,;-1) = 82$.

6. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = x^2 - 2y^2 - 3x + 5y - 1$.

1. definiční obor funkce $D(z)$**:** $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 2x - 3$ $\quad z_y = -4y + 5$

$\Longrightarrow \quad D(z_x) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R} \qquad D(z_y) : x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body: $2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$$-4y + 5 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

Funkce má jeden stacionární bod $\mathcal{M} = \left[\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{5}{4}\right]$.

4. druhé parciální derivace:

$$z_{xx} = 2$$
$$z_{xy} = 0$$
$$z_{yx} = 0$$
$$z_{yy} = -4$$

5. determinant: $D(\mathcal{M}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0$

V bodě $\mathcal{M}$ není lokální extrém.

6. druh extrému …

7. všude v $\mathbb{R}^2$ první parciální derivace existují.

Funkce nemá lokální extrém.

7. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \quad = \quad 1 - \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $\quad x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $\quad z_x = -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x \qquad z_y = -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y$

$$\Rightarrow \qquad D(z_x) : \mathbb{R}^2 \setminus [0\,;0] \qquad D(z_y) : \mathbb{R}^2 \setminus [0\,;0]$$

3. stacionární body:

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad \Rightarrow x = 0 \ \wedge \ y \neq 0$$

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad \Rightarrow y = 0 \ \wedge \ x \neq 0$$

Funkce NEmá stacionární bod (v bodě $\mathcal{N} = [0\,;0]$ první parciální derivace NEexistují).

4. druhé parciální derivace …

5. determinant …

6. druh extrému …

7. první parciální derivace NEexistují v bodě $\mathcal{N} = [0\,;0]$.

$$f(0\,;0) = 1$$

$$f(x\,,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} < 1 \qquad \forall x \neq 0 \ \vee \ \forall y \neq 0$$

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální MAXIMUM v bodě $\mathcal{N} = [0\,;0]$,

které má hodnotu $f(0\,;0) = 1$.