

Funkce více proměnných

Mějme rovnici $F(x; y) = 0$ a bod $\mathcal{A}[x_0; y_0]$.

Pokud platí všechny tři následující podmínky:

1. $F(x_0; y_0) = 0$;
2. v jistém okolí bodu $\mathcal{A}$ existují obě parciální derivace $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ a $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ a obě jsou v bodě $\mathcal{A}$ spojité;
3. a navíc $F_y(x_0; y_0) \neq 0$,

pak v nějakém okolí bodu $\mathcal{A}$ **existuje** právě jedna spojitá funkce jedné reálné proměnné (určitě existuje, i když ji třeba neumíme vyjádřit) $y = y(x)$, pro jejíž derivaci platí:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Potom říkáme, že funkce $y = y(x)$ je v okolí bodu $\mathcal{A}$ určena **implicitně** rovnicí

$$F(x; y) = 0.$$

Derivaci implicitní funkce nejčastěji počítáme, jako derivaci **složené** funkce, protože tento způsob umožňuje výpočet derivací vyšších řádů bez použití stále komplikovanějších vzorců.

1.1. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ V bodě $A[0; 2]$ napište hodnotu třetí derivace $y'''(A)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{y^3 - xy - 8}_{F(x; y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu A vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{2^3}_8 - 0 \cdot 2 - 8 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**. Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu A spojité a navíc hodnota $F_y(A) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = -y \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall y$$

$$F_y = 3y^2 - x \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(A) = 12 \neq 0$$

V okolí bodu A uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$\begin{aligned}(y^3 - xy - 8)' &= (0)' \\ (y^3)' - (xy)' - (8)' &= 0 \\ [3y^2 \cdot y'] - [(1 \cdot y) + (x \cdot y')] - 0 &= 0 \\ 3y^2 y' - y - xy' &= 0 \\ y'(3y^2 - x) &= y \\ \text{pro } x \neq 3y^2 \text{ (bod } A \text{ splňuje)} \quad y' &= \frac{y}{3y^2 - x}\end{aligned}$$

Druhou derivaci budeme ..., kde $y = y(x)$:

$$y'' = (y')' = \frac{y' \cdot (3y^2 - x) - y \cdot (6yy' - 1)}{(3y^2 - x)^2} = \frac{y - xy' - 3y^2 y'}{9y^4 - 6xy^2 + x^4}$$

Nebo

$$\begin{aligned}(3y^2 y' - y - xy')' &= (0)' \\ (6y \cdot y' + 3y^2 \cdot y'') - (y') - (1 \cdot y' + x \cdot y'') &= 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Třetí derivaci ..., kde $y = y(x)$:

$$\begin{aligned}y''' &= \frac{[y' - (1 \cdot y' + x \cdot y'') - 3(2yy' \cdot y' + y^2 \cdot y'')](9y^4 - 6xy^2 + x^4)}{(9y^4 - 6xy^2 + x^4)^2} - \\ &\quad - \frac{(y - xy' - 3y^2 y') \cdot [36y^3 y' - 6(1 \cdot y^2 + x \cdot 2yy')] + 4x^3}{(9y^4 - 6xy^2 + x^4)^2}\end{aligned}$$

Pro hodnotu třetí derivace v bodě $A[0;2]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

Ve skriptech¹ je na straně 50 (osmý řádek shora) uvedena **chybná hodnota druhé derivace**.

$$y' = \frac{y}{3y^2 - x} \quad \Rightarrow \quad y'(A) = \frac{2}{3 \cdot 2^2 - 0} = \frac{1}{6}$$

$$y'' = \frac{y - xy' - 3y^2 y'}{9y^4 - 6xy^2 + x^4} \quad \Rightarrow \quad y''(A) = \frac{2 - 0 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6}}{9 \cdot 2^4 - 6 \cdot 0 \cdot 2 + 0} = \underline{\underline{0}}$$

$$y'''(A) = \frac{\left[\underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}}_0 - 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right] \cdot (9 \cdot 2^4) - \left(\underbrace{2 - 12 \cdot \frac{1}{6}}_0 \right) \cdot [36 \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} - 24]}{(9 \cdot 2^4)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{9 \cdot 16} = -\frac{1}{432}$$

¹ Tryhuk, V., Dlouhý, O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných*. 1. vydání. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2004. 85 s. ISBN 80-214-2776-0

- 1.2.** $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ V bodě $T[x_T; 1]$, (kde $x_T < 0$) napište rovnici tečny a normály procházející bodem T pokud je rovnicí

$$x^2y - 2 = xy^3$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed dopočítáme chybějící souřadnici bodu T :

$$\begin{aligned} x_T^2 \cdot 1 - 2 &= x_T \cdot 1^3 \\ x_T^2 - x_T - 2 &= 0 \\ (x_T + 1) \cdot (x_T - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Tečný bod $T[-1; 1]$, protože $x_{T_2} = 2 > 0$.

Potom rovnici upravíme na tvar $F(x; y) = 0$ a spočítáme první **parciální derivace**.

$$\underbrace{xy^3 - x^2y + 2}_{F(x; y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu T spojitě a navíc hodnota $F_y(T) \neq 0$, pak existuje v okolí bodu T funkce $y = y(x)$ daná implicitně uvedenou rovnicí a k této funkci v bodě T existuje tečna a normála.

$$\begin{aligned} F_x &= y^3 - 2xy & \text{derivace } F_x & \text{ je spojitá } \forall x; y \\ F_y &= 3xy^2 - x^2 & \text{derivace } F_y & \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(T) = -4 \neq 0 \end{aligned}$$

V okolí bodu T uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y(x)$. Její („obyčejnou“)

derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$\begin{aligned} (x^2y - 2)' &= (xy^3)' \\ (x^2y)' - (2)' &= 1 \cdot y^3 + x \cdot (y^3)' \\ 2x \cdot y + x^2 \cdot y' - 0 &= y^3 + x \cdot (3y^2 \cdot y') \\ x^2 \cdot y' - 3xy^2 \cdot y' &= y^3 - 2xy \\ \text{pro } x \neq 0 \wedge x \neq 3y^2 & \text{ (bod } T \text{ splňuje)} \quad y' = \frac{y^3 - 2xy}{x^2 - 3xy^2} \end{aligned}$$

Víme, že hodnota derivace funkce v daném bodě je rovna směrnici tečny ke grafu této funkce v tomto bodě.

Pro hodnotu derivace v bodě $T[-1;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{y^3 - 2xy}{x^2 - 3xy^2} \Rightarrow y'(T) = \frac{(1)^3 - 2 \cdot (-1) \cdot (1)}{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) \cdot (1)^2} = \frac{3}{4}$$

Rovnice tečny k funkci $y(x)$ **v bodě** $T[x_T; y_T]$: $y - y_T = y'(T) \cdot (x - x_T)$

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{3}{4} \cdot [x - (-1)] \\ 4y - 4 &= 3x + 3 \\ 3x - 4y + 7 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (3; -4), \end{aligned}$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor.

Obecná rovnice tečny t : $3x - 4y + 7 = 0$

$$\begin{array}{l} \text{Parametrické rovnice normály } n : \\ \begin{array}{l} x = -1 + 3p \quad | \cdot 4 \\ y = 1 - 4p \quad | \cdot 3 \end{array} \end{array}$$

Obecná rovnice normály n : $4x + 3y + 1 = 0$

1.3. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ Určete $y'(0)$ a $y''(0)$ pokud je rovnicí

$$y \cdot \sin x + x^2 + y^3 = 1$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, pro kterou platí $y(0) = 1$.

Z podmínky $y(0) = 1$ plyne, že nás zajímá okolí bodu $B[0;1]$. Proto napřed ověříme, zda souřadnice bodu B vyhovují zadané rovnici:

$$1 \cdot \underbrace{\sin 0}_0 + 0^2 + 1^3 = 1$$

Potom rovnici upravíme na tvar $F(x; y) = 0$ a spočítáme první **parciální derivace**.

$$\underbrace{y \cdot \sin x + x^2 + y^3 - 1}_{F(x; y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu B spojité a navíc hodnota $F_y(B) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$\begin{array}{ll} F_x = y \cdot \cos x + 2x & \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y \\ F_y = \sin x + 3y^2 & \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(B) = 3 \neq 0 \end{array}$$

V okolí bodu B uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$(y \cdot \sin x + x^2 + y^3 - 1)' = (0)'$$

$$(y \cdot \sin x)' + (x^2)' + (y^3)' - (1)' = 0$$

$$[y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x] + 2x + 3y^2 \cdot y' - 0 = 0$$

$$y'(\sin x + 3y^2) = -2x - y \cdot \cos x$$

$$\text{pro } \sin x \neq -3y^2 \quad (\text{bod } B \text{ splňuje}) \quad y' = -\frac{2x + y \cdot \cos x}{\sin x + 3y^2}$$

Druhou derivaci budeme ..., kde $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{(2x + y \cdot \cos x)' \cdot (\sin x + 3y^2) - (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\sin x + 3y^2)'}{(\sin x + 3y^2)^2} = \\ &= -\frac{\{2 + [y' \cdot \cos x + y \cdot (-\sin x)]\} \cdot (\sin x + 3y^2) - (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{(\sin x + 3y^2)^2} = \\ &= \frac{-(2 + y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x) \cdot (\sin x + 3y^2) + (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{(\sin x + 3y^2)^2} = \\ &= \frac{(y \cdot \sin x - 2 - y' \cdot \cos x) \cdot (\sin x + 3y^2) + (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{(\sin x + 3y^2)^2} \end{aligned}$$

Pro hodnotu obou derivací v bodě $B[0;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = -\frac{2x + y \cdot \cos x}{\sin x + 3y^2} \quad \Rightarrow \quad y'(B) = -\frac{\underbrace{2 \cdot 0 + 1 \cdot \overbrace{\cos 0}^1}_{\sin 0 + 3 \cdot 1^2}}{0} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} y''(B) &= \frac{(1 \cdot \sin 0 - 2 + \frac{1}{3} \cdot \cos 0) \cdot (\sin 0 + 3 \cdot 1^2) + (2 \cdot 0 + 1 \cdot \cos 0) \cdot (\cos 0 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3})}{(\sin 0 + 3 \cdot 1^2)^2} = \\ &= \frac{(0 - 2 + \frac{1}{3}) \cdot (0 + 3) + (0 + 1) \cdot (1 - 2)}{(3)^2} = \frac{-5 - 1}{9} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

1.4. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ Určete $y'(C)$ pokud je rovnicí

$$x^2 + y^2 + x + y = 2xy + 2$$

a bodem $C = [1; ?]$ určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed dopočítáme chybějící souřadnici tak, aby bod C vyhovoval zadané rovnici:

$$1^2 + y^2 + 1 + y = 2 \cdot 1 \cdot y + 2$$

$$y^2 - y = 0$$

$$y \cdot (y - 1) = 0$$

Dostáváme dva body $C_1 = [1; 0]$ a $C_2 = [1; 1]$.

Potom rovnici upravíme na tvar $F(x; y) = 0$ a spočítáme první **parciální derivace**.

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 2}_{F(x; y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu C spojité a navíc hodnota $F_y(C) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x = 2x - 2y + 1$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = 2y - 2x + 1$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(C_1) = -1 \neq 0$; $F_y(C_2) = 1 \neq 0$

V okolí obou bodů C_1 i C_2 uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

$$\underbrace{1}_{a} \cdot y^2 - \underbrace{(2x - 1)}_b \cdot y + \underbrace{(x^2 + x - 2)}_c = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{2x - 1 \pm \sqrt{[-(2x - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 + x - 2)}}{2} = \frac{2x - 1 \pm \sqrt{9 - 8x}}{2}$$

Úloha má tedy dvě řešení. V okolí bodu $C_1 = [1; 0]$ lze implicitní funkci vyjádřit explicitně, jako

$$y_1 = \frac{2x - 1 - (9 - 8x)^{\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \cdot (9 - 8x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8) \right] \quad y'(1) = 3$$

a v okolí bodu $C_2 = [1; 1]$ jako

$$y_2 = \frac{2x - 1 + (9 - 8x)^{\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \left[2 + \frac{1}{2} \cdot (9 - 8x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8) \right] \quad y'(1) = -1$$

A co když nedokážeme funkci vyjádřit explicitně? Pak budeme („*obyčejnou*“)

derivaci počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + x + y)' &= (2xy + 2)' \\(x^2)' + (y^2)' + (x)' + (y)' &= (2xy)' + (2)' \\2x + 2yy' + 1 + y' &= 2(1 \cdot y + x \cdot y') + 0 \\y'(2y + 1 - 2x) &= -2x - 1 + 2y\end{aligned}$$

$$\text{pro } 2x \neq 2y + 1 \quad (\text{oba body } C \text{ splňují}) \quad y' = \frac{2y - 2x - 1}{2y + 1 - 2x}$$

Pro hodnotu derivací v obou bodech $C_1[1;0]$ a $C_2[1;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{2y - 2x - 1}{2y + 1 - 2x} \quad \Rightarrow \quad y'(C_1) = \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 0 + 1 - 2 \cdot 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y' = \frac{2y - 2x - 1}{2y + 1 - 2x} \quad \Rightarrow \quad y'(C_2) = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

1.5. $[x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; y \in \mathbb{R}]$ V bodě $D = [1;0]$ určete hodnotu (první) derivace $y'(D)$, pokud je rovnicí

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu D vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{\ln \sqrt{1^2 + 0^2}}_0 = \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{0}{1}}_0$$

Potom rovnici upravíme na tvar $F(x; y) = 0$ a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F : \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arctg} \left(y \cdot \frac{1}{x} \right) = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu D spojité a navíc hodnota $F_y(D) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x \neq 0$$

$$F_y = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x \neq 0$$

$$F_y(D) = -1 \neq 0$$

V okolí bodu $D = [1;0]$ tedy uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$\begin{aligned} \left[\ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]' &= \left(\arctg \frac{y}{x} \right)' \\ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2y \cdot y') &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} \\ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2 \cdot (x + yy') &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} \\ \frac{x + yy'}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} \\ \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} \quad | (x^2 + y^2) \\ x + yy' &= xy' - y \\ x + y &= xy' - yy' \\ \text{pro } x \neq y \text{ (bod } D \text{ splňuje)} \quad \frac{x + y}{x - y} &= y' \end{aligned}$$

Pro hodnotu derivace v bodě $D[1;0]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{x + y}{x - y} \quad \Rightarrow \quad y'(D) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

1.6. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ V bodě $E[0;1]$ určete hodnotu (první) derivace $y'(E)$, pokud je rovnici

$$\underbrace{(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3}_{F(x;y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu E vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{(0^2 + 1^2)^2}_1 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**. Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu E spojité a navíc hodnota $F_y(E) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = 2(x^2 + y^2)^1 \cdot 2x - 6xy \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y$$

$$F_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 3x^2 - 3y^2 \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(E) = 1 \neq 0$$

V okolí bodu E uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje **funkci** proměnné x :

$$\begin{aligned} & \left[(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 \right]' = (0)' \\ & \left[(x^2 + y^2)^2 \right]' - (3x^2 \cdot y)' - (y^3)' = 0 \\ & \left[2(x^2 + y^2)^1 \cdot (2x + 2y \cdot y') \right] - \left[(6x \cdot y) + (3x^2 \cdot y') \right] - (3y^2 \cdot y') = 0 \\ & y'[4y(x^2 + y^2) - 3x^2 - 3y^2] = 6xy - 4x(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Pro hodnotu derivace v bodě $E[0;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{6xy - 4x(x^2 + y^2)}{4y(x^2 + y^2) - 3x^2 - 3y^2} \Rightarrow y'(E) = \frac{6 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot (0^2 + 1^2)}{4 \cdot 1 \cdot (0^2 + 1^2) - 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 1^2} = 0$$

Bod E je pro danou funkci **stacionárním** bodem.

1.7. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ Pokud je bodem $G = [1; -1]$ a rovnicí

$$\underbrace{x^4 + y^3 + 2x^2y + 2}_{F(x;y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, najděte její lokální extrémy.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu G vyhovují zadané rovnici:

$$1^4 + (-1)^3 + 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**. Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu G spojité a navíc hodnota $F_y(G) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = 4x^3 + 4x \cdot y \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y$$

$$F_y = 3y^2 + 2x^2 \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(G) = 5 \neq 0$$

V okolí bodu G uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde $y(x)$:

$$(x^4 + y^3 + 2x^2y + 2)' = (0)'$$

$$(x^4)' + (y^3)' + (2x^2y)' + (2)' = 0$$

$$4x^3 + 3y^2 \cdot y' + (4x \cdot y + 2x^2 \cdot y') + 0 = 0$$

$$y' \cdot (3y^2 + 2x^2) = -4x^3 - 4xy$$

$$\text{pro } 2x^2 \neq -3y^2 \quad (\text{bod } G \text{ splňuje)} \quad y' = -\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2}$$

Lokální extrém může nastat pouze v bodech, kde:

$$\text{A) první derivace } (y') \text{ neexistuje} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

$$\text{B) první derivace se rovná nule} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 + y = 0$$

1.7.A Bod $[0;0]$ vyhovující první podmínce ovšem neleží na funkci:

$$F(0;0) = 0^4 + 0^3 + 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$$

1.7.B.1. Když $x = 0$, pak:

$$F(0;y) = 0^4 + y^3 + 2 \cdot 0^2 \cdot y + 2 = 0$$

$$y^3 = -2$$

$$y = -\sqrt[3]{2}$$

Bod, který nás zajímá, má souřadnice $A = [0; -\sqrt[3]{2}]$. Ověříme, zda je v okolí bodu A definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(A) \neq 0$.

$$F_y = 3y^2 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad F_y(A) = 3 \cdot (-\sqrt[3]{2})^2 + 2 \cdot 0^2 = 3 \cdot \sqrt[3]{4} \neq 0$$

1.7.B.2. Když $x^2 + y = 0$, pak:

$$F(x; -x^2) = x^4 + (-x^2)^3 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x^2) + 2 = 0$$

$$-x^6 - x^4 + 2 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\text{zavedeme substituci: } x^2 = s \quad s^3 + s - 2 = 0$$

HS	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

možné kořeny $\pm 1; \pm 2$

$$(s - 1) \cdot (s^2 + s + 2) = 0$$

$$s_1 = 1$$

$$(\text{záporný diskriminant}) \quad s_{2;3} = \text{komplexně sdružené}$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1;2} = \pm 1$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $B = [-1; -1]$ a $G = [1; -1]$. Ověříme, zda je v okolí bodu B definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše, stejně jako bod G), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(B) \neq 0$.

$$F_y = 3y^2 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad F_y(B) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 = 5 \neq 0$$

Body „podezřelé“ z extrému (může v nich být lokální extrém). Zda skutečně je, zjistíme ze znamének první derivace. Jestliže $y'(\mathcal{A}) > 0$ pak v tomto bodě funkce roste, ...

$$B = [-1; -1] \quad \lim_{x \rightarrow B^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2} \right] = -\frac{4 \cdot (-1^-) \cdot \overbrace{[(-1^-)^2 + (-1)]}^{>0}}{3(-1)^2 + 2(-1)^2} > 0 \quad \lim_{x \rightarrow B^+} \dots$$

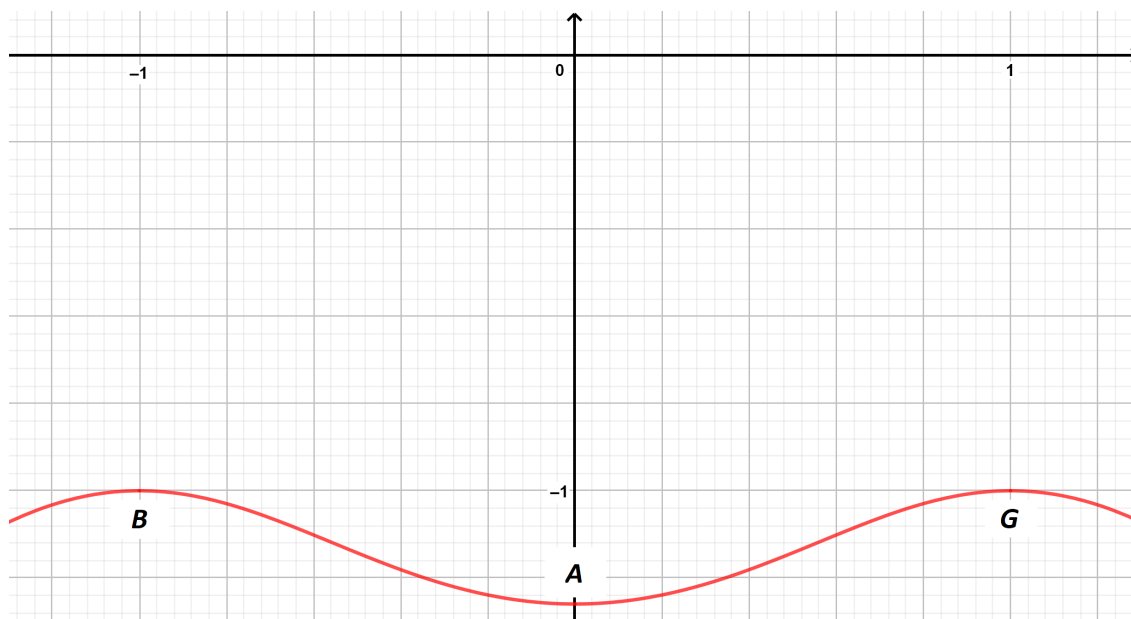
$$A = [0; -\sqrt[3]{2}] \quad \lim_{x \rightarrow A^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2} \right] = \dots \quad \lim_{x \rightarrow A^+} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2} \right] = \dots$$

$$G = [1; -1] \quad \lim_{x \rightarrow G^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2} \right] = \dots \quad \lim_{x \rightarrow G^+} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2} \right] = \dots$$

Ze znamének 1. derivace: $+++ [B] --- [A] +++ [G] ---$ určíme intervaly, ve kterých funkce roste a klesá. Proto v bodě: $B = [-1; -1]$ je lokální MAXIMUM;

$A = [0; -\sqrt[3]{2}]$ je lokální minimum;

$G = [1; -1]$ je lokální MAXIMUM.



1.8. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}]$ Pokud je bodem $H = [-1; 0]$ a rovnicí

$$\underbrace{x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1}_{F(x;y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, najděte její lokální extrémy.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu H vyhovují zadané rovnici:

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**. Pokud jsou obě dvě F_x, F_y v okolí bodu H spojité a navíc hodnota $F_y(H) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = 2x - 2y + 2 \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y$$

$$F_y = -2x + 4y \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y \text{ a } F_y(H) = 2 \neq 0$$

V okolí bodu H uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („obyčejnou“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde $y(x)$:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1)' &= (0)' \\(x^2)' - (2xy)' + (2y^2)' + (2x)' + (1)' &= 0 \\2x - (2y + 2x \cdot y') + 4y \cdot y' + 2 + 0 &= 0 \\2x - 2y + 2 &= 2xy' - 4yy' \\2 \cdot (x - y + 1) &= 2y' \cdot (x - 2y) \\ \text{pro } x \neq 2y \text{ (bod } G \text{ splňuje)} \quad \frac{x - y + 1}{x - 2y} &= y'\end{aligned}$$

Lokální extrém může nastat pouze v bodech, kde:

$$\begin{aligned}\text{A) první derivace } (y') \text{ neexistuje} &\Rightarrow x = 2y \\ \text{B) první derivace se rovná nule} &\Rightarrow x + 1 = y\end{aligned}$$

1.8.A Když $x = 2y$, pak:

$$\begin{aligned}F(2y; y) &= (2y)^2 - 2 \cdot (2y) \cdot y + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot (2y) + 1 = 0 \\2y^2 + 4y + 1 &= 0 \\y_{1;2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot (4 - 2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $A = [-2 + \sqrt{2}; \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}]$ a $B = [-2 - \sqrt{2}; \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}]$.

Ověříme, zda je v jejich okolí definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti partiálních derivací je splněna (viz výše), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(A) \neq 0$ a $F_y(B) \neq 0$.

$$\begin{aligned}F_y(A) &= -2(-2 + \sqrt{2}) + 4 \cdot \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} = -2(-2 + \sqrt{2}) + 2(-2 + \sqrt{2}) = 0 \\F_y &= -2x + 4y \\F_y(B) &= -2(-2 - \sqrt{2}) + 4 \cdot \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} = -2(-2 - \sqrt{2}) + 2(-2 - \sqrt{2}) = 0\end{aligned}$$

Ani jedním bodem není určena funkce, proto ani v jednom z uvedených bodů nemůže nastat extrém (funkce).

1.8.B Když $y = x + 1$, pak:

$$\begin{aligned}F(x; x + 1) &= x^2 - 2x \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 1)^2 + 2x + 1 = 0 \\x^2 - 2x^2 - 2x + 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2x + 1 &= 0 \\x^2 + 4x + 3 &= 0 \\x_{1;2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}\end{aligned}$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $H = [-1; 0]$ a $C = [-3; -2]$. Ověříme, zda je v okolí bodu C definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše, stejně jako bod H), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(C) \neq 0$.

$$F_y = -2x + 4y \quad \Rightarrow \quad F_y(C) = -2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) = -2 \neq 0$$

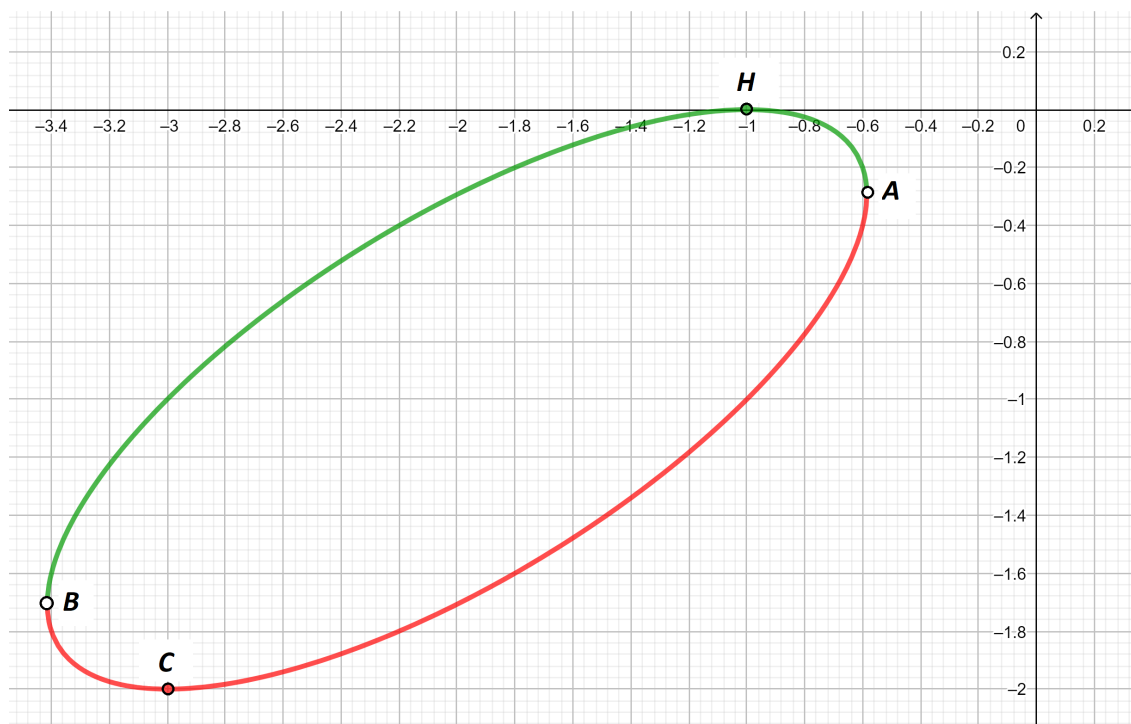
Ovšem jak zjistíme z obrázku, každý z těchto bodů leží na jiné funkci. Bod H je na **zelené** funkci určené implicitně rovnicí a bod C je na druhé **červené** funkci.

Body „podezřelé“ z extrému (může v nich být lokální extrém). Zda skutečně je, zjistíme ze znamének první derivace. Jestliže $y'(\mathcal{A}) > 0$ pak v tomto bodě funkce roste, ...

$$H = [-1; 0] \quad \lim_{x \rightarrow H^-} \left[\frac{x-y+1}{x-2y} \right] = -\frac{4 \cdot (-1^-) \cdot \overbrace{[(-1^-)^2 + (-1)]}^{>0}}{3(-1)^2 + 2(-1)^2} > 0 \quad \lim_{x \rightarrow H^+} \dots$$

$$C = [-3; -2] \quad \lim_{x \rightarrow C^-} \left[\frac{x-y+1}{x-2y} \right] = \dots \quad \lim_{x \rightarrow C^+} \left[\frac{x-y+1}{x-2y} \right] = \dots$$

Ze znamének 1. derivace: $---[C]+++ \quad +++[H]---$ určíme intervaly, ve kterých funkce roste a klesá. Proto v bodě: $C = [-3; -2]$ je lokální minimum;
 $H = [-1; 0]$ je lokální MAXIMUM.



Mějme rovnici $F(x; y; z) = 0$ a bod $\mathcal{A}[x_0; y_0; z_0]$.

Pokud platí následující všechny tři podmínky:

1. $F(x_0; y_0; z_0) = 0$;

2. v jistém okolí bodu $\mathcal{A}$ existují všechny tři parciální derivace

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ a } F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \text{ a všechny jsou v bodě } \mathcal{A} \text{ spojité;}$$

3. a navíc $F_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$;

pak v nějakém okolí bodu $\mathcal{A}$ **existuje** právě jedna spojitá funkce dvou reálných proměnných (určitě existuje, i když ji třeba neumíme vyjádřit) $z = z(x; y)$, pro jejíž parciální derivace platí:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \text{ a } z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Potom říkáme, že funkce $z = z(x; y)$ je v okolí bodu $\mathcal{A}$ určena **implicitně** rovnicí

$$F(x; y; z) = 0.$$

2.1. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ V bodě $A = [0; 0; 4]$ napište totální diferenciál **druhého řádu** $d^2 f(A)$, pokud je rovnicí

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1$$

určena implicitní funkce $z = z(x; y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu A vyhovují zadané rovnici:

$$\frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{8} + \frac{4^2}{16} = 1$$

Potom rovnici upravíme na tvar $F(x; y; z) = 0$ a spočítáme první **parciální derivace**.

$$F_x = \frac{2x}{4} \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x$$

$$F_y = \frac{2y}{8} \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall y$$

$$F_z = \frac{2z}{16} \quad \text{derivace } F_z \text{ je spojitá } \forall z \text{ a } F_z(A) = \frac{1}{2} \neq 0$$

V okolí bodu A uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x; y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde písmeno z označuje **funkci** proměnných $x; y$:

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16}\right)' = (1)'$$

$$\begin{aligned} z_x : \quad \left(\frac{x^2}{4}\right)_x + \left(\frac{y^2}{8}\right)_x + \left(\frac{z^2}{16}\right)_x &= (1)_x \\ \frac{2x}{4} + 0 + \frac{2z \cdot z_x}{16} &= 0 \quad | \cdot 8 \\ 4x + zz_x &= 0 \\ zz_x &= -4x \end{aligned}$$

$$\text{pro } z \neq 0 \text{ (bod } A \text{ splňuje)} \quad z_x = -\frac{4x}{z}$$

$$\begin{aligned} z_y : \quad \left(\frac{x^2}{4}\right)_y + \left(\frac{y^2}{8}\right)_y + \left(\frac{z^2}{16}\right)_y &= (1)_y \\ 0 + \frac{2y}{8} + \frac{2z \cdot z_y}{16} &= 0 \quad | \cdot 8 \\ 2y + zz_y &= 0 \\ zz_y &= -2y \end{aligned}$$

$$\text{pro } z \neq 0 \text{ (bod } A \text{ splňuje)} \quad z_y = -\frac{2y}{z}$$

Druhé parciální derivace budeme počítat ..., kde $z(x; y)$:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\frac{4 \cdot z - 4x \cdot z_x}{z^2} = -\frac{4 \cdot z - 4x \cdot \left(-\frac{4x}{z}\right)}{z^2} & z_{xy} &= -\frac{0 \cdot z - 4x \cdot z_y}{z^2} = -\frac{0 \cdot z - 4x \cdot \left(-\frac{2y}{z}\right)}{z^2} \\ z_{yx} &= -\frac{0 \cdot z - 2y \cdot z_x}{z^2} = -\frac{0 \cdot z - 2y \cdot \left(-\frac{4x}{z}\right)}{z^2} & z_{yy} &= -\frac{2 \cdot z - 2y \cdot z_y}{z^2} = -\frac{2 \cdot z - 2y \cdot \left(-\frac{2y}{z}\right)}{z^2} \end{aligned}$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $A = [0; 0; 4]$ dosadíme souřadnice bodu.

$$\begin{aligned} z_{xx}(A) &= -\frac{4 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{4 \cdot 0}{4}\right)}{4^2} = -1 & z_{xy}(A) &= -\frac{0 \cdot 4 - 4 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2 \cdot 0}{4}\right)}{4^2} = 0 \\ z_{yx}(A) &= -\frac{0 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{4 \cdot 0}{4}\right)}{4^2} = 0 & z_{yy}(A) &= -\frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2 \cdot 0}{4}\right)}{4^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Totální difer. $d^2 f = -1 \cdot (x-0) \cdot (x-0) + 0 \cdot (x-0) \cdot (y-0) + 0 \cdot (y-0) \cdot (x-0) - \frac{1}{2} \cdot (y-0) \cdot (y-0)$

$$d^2 f = -x^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2$$

2.2. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ V bodě $B[0;1;0]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(B)$ a $z_y(B)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{e^z + x^2y + z - 1}_{F(x;y;z)} = 0$$

určena implicitní funkce $z = z(x; y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu B vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{e^0}_{1} + 0^2 \cdot 1 + 0 - 1 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**.

$$F_x = 2x \cdot y \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y$$

$$F_y = x^2 \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x$$

$$F_z = e^z + 1 \quad \text{derivace } F_z \text{ je spojitá } \forall z \text{ a } F_z(B) = 2 \neq 0$$

V okolí bodu B uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x; y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde písmeno z označuje **funkci** proměnných $x; y$:

$$(e^z + x^2y + z - 1)' = (0)'$$

$$z_x : (e^z)_x + (x^2y)_x + (z)_x - (1)_x = (0)_x$$

$$e^z \cdot z_x + 2xy + z_x - 0 = 0$$

$$e^z \cdot z_x + z_x = -2xy$$

$$z_x \cdot (e^z + 1) = -2xy$$

$$\text{pro } e^z \neq -1 \text{ (každý bod splňuje)} \quad z_x = -\frac{2xy}{e^z + 1}$$

$$z_y : (e^z)_y + (x^2y)_y + (z)_y - (1)_y = (0)_y$$

$$e^z \cdot z_y + x^2 + z_y - 0 = 0$$

$$e^z \cdot z_y + z_y = -x^2$$

$$z_y \cdot (e^z + 1) = -x^2$$

$$\text{pro } e^z \neq -1 \text{ (každý bod splňuje)} \quad z_y = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $B = [0;1;0]$ dosadíme souřadnice bodu.

$$z_x = -\frac{2xy}{e^z + 1} \Rightarrow z_x(A) = -\frac{2 \cdot 0 \cdot 1}{e^0 + 1} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$z_y = -\frac{x^2}{e^z + 1} \Rightarrow z_y(A) = -\frac{0^2}{e^0 + 1} = -\frac{0}{2} = 0$$

2.3. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ V bodě $C[1;1;1]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(C)$ a $z_y(C)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4}_{F(x;y;z)} = 0$$

určena implicitní funkce $z = z(x; y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu C vyhovují zadané rovnici:

$$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 - 4 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**.

$$F_x = 8x + y + 1 \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x; y$$

$$F_y = 4y + x - z \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; y; z$$

$$F_z = -6z - y \quad \text{derivace } F_z \text{ je spojitá } \forall y; z \text{ a } F_z(C) = -7 \neq 0$$

V okolí bodu C uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x; y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde $z(x; y)$:

$$(4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4)' = (0)'$$

$$z_x : (4x^2)_x + (2y^2)_x - (3z^2)_x + (xy)_x - (yz)_x + (x)_x - (4)_x = (9)_x$$

$$8x + 0 - 6z \cdot z_x + y - y \cdot z_x + 1 - 0 = 0$$

$$8x + y + 1 = 6zz_x + yz_x$$

$$8x + y + 1 = z_x \cdot (6z + y)$$

$$\text{pro } y \neq -6z \text{ (bod } C \text{ splňuje)} \quad \frac{8x + y + 1}{6z + y} = z_x$$

$$z_y : (4x^2)_y + (2y^2)_y - (3z^2)_y + (xy)_y - (yz)_y + (x)_y - (4)_y = (9)_y$$

$$0 + 4y - 6z \cdot z_y + x - (1 \cdot z + y \cdot z_y) + 0 - 0 = 0$$

$$4y + x - z = 6zz_y + yz_y$$

$$4y + x - z = z_y \cdot (6z + y)$$

$$\text{pro } y \neq -6z \text{ (bod } C \text{ splňuje)} \quad \frac{4y + x - z}{6z + y} = z_y$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $C = [1;1;1]$ dosadíme souřadnice.

$$z_x = \frac{8x + y + 1}{6z + y} \Rightarrow z_x(C) = \frac{8 \cdot 1 + 1 + 1}{6 \cdot 1 + 1} = \frac{10}{7}$$

$$z_y = \frac{4y + x - z}{6z + y} \Rightarrow z_y(C) = \frac{4 \cdot 1 + 1 - 1}{6 \cdot 1 + 1} = \frac{4}{7}$$

2.4. $[x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}]$ V bodě $D = [0;0;1]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(D)$ a $z_y(D)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{3xyz - z^3 + 1 = 0}_{F(x;y;z)}$$

určena implicitní funkce $z = z(x; y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu D vyhovují zadané rovnici:

$$3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3 + 1 = 0$$

Potom spočítáme první **parciální derivace**.

$$F_x = 3yz \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall y; z$$

$$F_y = 3xz \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x; z$$

$$F_z = 3xy - 3z^2 \quad \text{derivace } F_z \text{ je spojitá } \forall x; y; z \text{ a } F_z(D) = -3 \neq 0$$

V okolí bodu D uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x; y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde $z(x; y)$:

$$(3xyz - z^3 + 1)' = (0)'$$

$$\begin{aligned} z_x : \quad & 3y \cdot (xz)_x - (z^3)_x + (1)_x = (0)_x \\ & 3y \cdot (1 \cdot z + x \cdot z_x) - (3z^2 \cdot z_x) + 0 = 0 \\ & 3yz = 3z^2 z_x - 3xyz_x \\ & 3yz = z_x \cdot (3z^2 - 3xy) \end{aligned}$$

$$\text{pro } xy \neq z^2 \text{ (bod } D \text{ splňuje)} \quad \frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = z_x$$

$$\begin{aligned} z_y : \quad & 3x \cdot (yz)_y - (z^3)_y + (1)_y = (0)_y \\ & 3x \cdot (1 \cdot z + y \cdot z_y) - (3z^2 \cdot z_y) + 0 = 0 \\ & 3xz = 3z^2 z_y - 3xyz_y \\ & 3xz = z_y \cdot (3z^2 - 3xy) \end{aligned}$$

$$\text{pro } xy \neq z^2 \text{ (bod } D \text{ splňuje)} \quad \frac{3xz}{3z^2 - 3xy} = z_y$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $D = [0;0;1]$ dosadíme souřadnice.

$$z_x = \frac{\cancel{3} \cdot yz}{\cancel{3} \cdot (z^2 - xy)} \Rightarrow z_x(D) = \frac{0 \cdot 1}{1^2 - 0 \cdot 0} = 0$$

$$z_y = \frac{\cancel{3} \cdot xz}{\cancel{3} \cdot (z^2 - xy)} \Rightarrow z_y(D) = \frac{0 \cdot 1}{1^2 - 0 \cdot 0} = 0$$