

Funkce více proměnných

Spojité reálné funkce dvou reálných proměnných nabývá svých absolutních extrémů na **uzavřené** (obsahuje všechny své hraniční body – podobně jako uzavřený interval obsahuje oba hraniční body) a **ohraničené** (dá se jí opsat n -úhelník) rovinné oblasti (kompaktní množině) $\mathcal{M}$ (viz strana 53 skript – Tryhuk, V., Dlouhý, O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných*. 1. vydání. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2004. 85 s. ISBN 80-214-2776-0)

bud'

- v bodech lokálního extrému ležících uvnitř $\mathcal{M}$

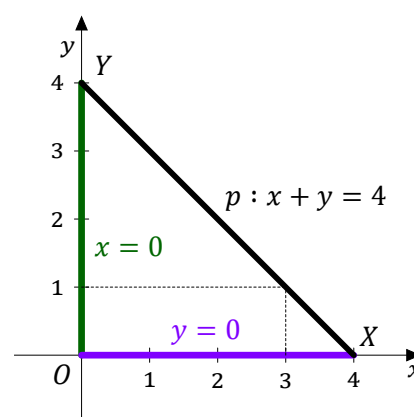
nebo

- v některém bodě na hranici $\mathcal{M}$.

1. Určete globální (absolutní) extrémy, tedy největší a nejmenší hodnotu funkce:

$$f(x, y) : z = xy - x^2 - y^2 + x + y$$

v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a přímkou $p : x + y = 4$.



1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je trojúhelník $\triangle OXY$, kde $O = [0; 0]$ je počátek soustavy souřadnic. Tedy

$$\mathcal{M} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$$

2. Určíme první parciální derivace funkce z a položíme je rovny nule, protože lokální extrém může nastat pouze v bodech,

- kde se 1. parciální derivace rovnají nule

nebo

- kde 1. parciální derivace neexistují.

$$\begin{array}{rcl} z_x = & y - 2x + 1 = 0 & | \cdot 2 \\ z_y = & x - 2y + 1 = 0 & \\ \hline & -3x + 3 = 0 & \\ & x = 1 & y = 1 \end{array}$$

A protože $\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2$, našli jsme jediný bod $A = [1; 1] \in \mathcal{M}$ (ležící uvnitř zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

3. Vyšetříme situaci na hranici. Nejdříve na úsečce $y = 0; \quad x \in \langle 0; 4 \rangle$. Ta je ohraničena body **O** a **X**. Po dosazení dostáváme funkci jedné proměnné, jejíž extrémy jsme studovali v prvním semestru.

$$\begin{aligned} f(x, y = 0) : z &= x \cdot 0 - x^2 - 0^2 + x + 0 \\ z &= -x^2 + x \\ \mathcal{D}(z') &= \mathbb{R}; \quad z' = -2x + 1 = 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A máme další bod **B** = $\left[\frac{1}{2}; 0\right] \in \mathcal{M}$ (ležící na vodorovné odvěsně zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

4. Hraniční úsečka $x + y - 4 = 0$ je ohraničena body **X** a **Y**.

$$\begin{aligned} f(x, y = 4 - x) : z &= x \cdot (4 - x) - x^2 - (4 - x)^2 + x + (4 - x) \\ z &= 4x - x^2 - x^2 - (16 - 8x + x^2) + x + 4 - x \\ z &= -3x^2 + 12x - 12 \\ \mathcal{D}(z') &= \mathbb{R}; \quad z' = -6x + 12 = 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

A máme další bod **C** = $[2; 2] \in \mathcal{M}$ (ležící na přeponě zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

5. Hraniční úsečka $x = 0; \quad y \in \langle 0; 4 \rangle$ je ohraničena body **O** a **Y**.

$$\begin{aligned} f(x = 0, y) : z &= 0 \cdot y - 0^2 - y^2 + 0 + y \\ z &= -y^2 + y \\ \mathcal{D}(z') &= \mathbb{R}; \quad z' = -2y + 1 = 0 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A máme další bod **D** = $\left[0; \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ (ležící na svislé odvěsně zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

6. V každém bodě podezřelém z extrému (jsou značeny červeně) určíme funkční hodnotu a najdeme extrémní z nich.

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$$

$A = [1; 1]$	$f(A) = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{1}}$	globální maximum v A
$B = \left[\frac{1}{2}; 0\right]$	$f(B) = 0 - \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$	
$C = [2; 2]$	$f(C) = 4 - 4 - 4 + 2 + 2 = 0$	
$D = \left[0; \frac{1}{2}\right]$	$f(D) = 0 - 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	
$O = [0; 0]$	$f(O) = 0 - 0 - 0 + 0 + 0 = 0$	
$X = [4; 0]$	$f(X) = 0 - 16 - 0 + 4 + 0 = \underline{\underline{-12}}$	globální minimum v X
$Y = [0; 4]$	$f(Y) = 0 - 0 - 16 + 0 + 4 = \underline{\underline{-12}}$	globální minimum v Y

2. Určete globální extrémy funkce: $f(x, y) : z = (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$
na množině $\mathcal{M} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$ což také píšeme $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$.

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 2.

2. Určíme první parciální derivace funkce z a položíme je rovny nule, abychom našli stacionární body a tím i případné lokální extrémy.

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 & z_x = & 4x \cdot e^{-x^2-y^2} + (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = 0 \\ \mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 & z_y = & 6y \cdot e^{-x^2-y^2} + (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 0 \\ & & \hline & & 2x \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \quad | : e^{-x^2-y^2} (\neq 0) \\ & & 2y \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \quad | : e^{-x^2-y^2} \\ & & \hline & & 2x \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\ & & 2y \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \end{array}$$

Součin činitelů se rovná nule, ... Tím se řešení poslední soustavy rozpadne na čtyři části:

2.1. $2x = 0 \wedge 2y = 0 \Rightarrow$ Našli jsme první bod $A = [0; 0] \in \mathcal{M}$ (ležící uvnitř zadaného kruhu), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{2.2.} & 2x = 0 \wedge 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 & \Rightarrow \quad 3 - 2 \cdot 0^2 - 3y^2 = 0 \\ & & y^2 = 1 \\ & & y_{1;2} = \pm 1 \end{array}$$

Našli jsme další body $B = [0; 1] \in \mathcal{M}$ a $C = [0; -1] \in \mathcal{M}$...

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{2.3.} & 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \wedge 2y = 0 & \Rightarrow \quad 2 - 2x^2 - 3 \cdot 0^2 = 0 \\ & & x^2 = 1 \\ & & x_{1;2} = \pm 1 \end{array}$$

Našli jsme další body $D = [1; 0] \in \mathcal{M}$ a $E = [-1; 0] \in \mathcal{M}$...

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{2.4.} & 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \wedge 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 & \Rightarrow \quad -3y^2 = 2x^2 - 3 \\ & 2 - 2x^2 + \underbrace{(2x^2 - 3)}_{-3y^2} = 0 & \text{kterážto rovnice nemá řešení pro žádné } x. \end{array}$$

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 4$, kterou si rozdělíme na 2 části (polokružnice), protože kružnice není grafem funkce.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{4 - x^2} \wedge x \in \langle -2; 2 \rangle$ je ohraničena $F = [-2; 0]$ a $G = [2; 0]$

$$\begin{aligned} f(x, y = \sqrt{4 - x^2}) : z &= [2x^2 + 3(4 - x^2)] \cdot e^{-x^2 - (4 - x^2)} \\ z &= (x^2 + 12) \cdot e^{-4} \\ \mathcal{D}(z') &= \mathbb{R} \quad z' = 2x \cdot e^{-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Našli jsme další bod $H = [0; 2]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{4 - x^2} \wedge x \in \langle -2; 2 \rangle$ je také ohraničena body F a G .

$$\begin{aligned} f(x, y = -\sqrt{4 - x^2}) : z &= [2x^2 + 3(4 - x^2)] \cdot e^{-x^2 - (4 - x^2)} \\ z &= (x^2 + 12) \cdot e^{-4} \\ \mathcal{D}(z') &= \mathbb{R} \quad z' = 2x \cdot e^{-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Našli jsme další bod $J = [0; -2]$.

Všechny **červeně** označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a najdeme extrémní z nich.

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned} A = [0; 0] \quad f(A) &= [2 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (0)^2] \cdot e^{-(0)^2 - (0)^2} = \underline{\underline{0}} \quad \text{globální minimum v } A \\ B = [0; 1] \quad f(B) &= [2 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (1)^2] \cdot e^{-(0)^2 - (1)^2} = 3e^{-1} \doteq \underline{\underline{1,1}} \quad \text{globální maximum v } B \\ C = [0; -1] \quad f(C) &= [2 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (-1)^2] \cdot e^{-(0)^2 - (-1)^2} = \underline{\underline{3e^{-1}}} \quad \text{globální maximum v } C \\ D = [1; 0] \quad f(D) &= [2 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (0)^2] \cdot e^{-(1)^2 - (0)^2} = 2e^{-1} \\ E = [-1; 0] \quad f(E) &= [2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (0)^2] \cdot e^{-(-1)^2 - (0)^2} = 2e^{-1} \\ F = [-2; 0] \quad f(F) &= [2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (0)^2] \cdot e^{-(-2)^2 - (0)^2} = 8e^{-4} \doteq 0,1 \\ G = [2; 0] \quad f(G) &= [2 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (0)^2] \cdot e^{-(2)^2 - (0)^2} = 8e^{-4} \\ H = [0; 2] \quad f(H) &= [2 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (2)^2] \cdot e^{-(0)^2 - (2)^2} = 12e^{-4} \doteq 0,2 \\ J = [0; -2] \quad f(J) &= [2 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (-2)^2] \cdot e^{-(0)^2 - (-2)^2} = 12e^{-4} \end{aligned}$$

3. Určete globální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x - y$

na množině $\mathcal{M} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 1.

2. Určíme první parciální derivace funkce z a ...

$$\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 \quad z_x = 1 \neq 0$$

$$\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 \quad z_y = -1 \neq 0$$

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 1$, kterou si rozdělíme.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{1 - x^2} \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ je ohraničena $A = [-1; 0]$ a $B = [1; 0]$

$$f(x, y = \sqrt{1 - x^2}) : z = x - \sqrt{1 - x^2} = x - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \quad z' = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -1 \quad |^2$$

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Našli jsme další dva body $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{1 - x^2} \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ je také ohraničena body A a B .

$$f(x, y = -\sqrt{1 - x^2}) : z = x - (-\sqrt{1 - x^2}) = x + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \quad z' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 \quad |^2$$

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Našli jsme další dva body $E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Všechny **červeně** označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a ...

$$f(x, y) = x - y$$

$$A = [-1; 0] \quad f(A) = -1 - 0 = -1$$

$$B = [1; 0] \quad f(B) = 1 - 0 = 1$$

$$C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(C) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(D) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\sqrt{2}}} \quad \text{globální minimum}$$

$$E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \doteq 1,4 \quad \text{globální maximum}$$

$$F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

4. Určete globální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1$
na množině $\mathcal{M} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Množina $\mathcal{M}$, tj. uzavřená ohraničená rovinná oblast, je stejný kruh jako v předchozím příkladu (střed v počátku soustavy souřadnic a poloměr 1).

2. Určíme první parciální derivace funkce z a ...

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 \quad z_x &= 2x - 4 = 0 & \Rightarrow x &= 2 \\ \mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 \quad z_y &= 2y - 4 = 0 & \Rightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

$$Q = [2; 2] \notin \mathcal{M}$$

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{1 - x^2} \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ je ohraničena $A = [-1; 0]$ a $B = [1; 0]$

$$f(x, y = \sqrt{1 - x^2}) : z = x^2 - 4x + \underbrace{(1 - x^2)}_{y^2} - 4\sqrt{1 - x^2} - 1 = -4x - 4(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \quad z' = -4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) &= 0 & | : 4 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 & |^2 \\ \frac{x^2}{1-x^2} &= 1 \\ x^2 &= 1 - x^2 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x_{1;2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Našli jsme další dva body $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{1 - x^2} \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ je také ohraničena body A a B .

$$\begin{aligned} f(x, y = -\sqrt{1 - x^2}) : z &= -4x + 4(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \quad z' &= -4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = 0 & | : 4 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 & |^2 \\ \frac{x^2}{1-x^2} &= 1 \\ x^2 &= 1 - x^2 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x_{1;2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Našli jsme další dva body $E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Všechny **červeně** označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a ...

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1$$

$$A = [-1; 0] \quad f(A) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + (0)^2 - 4 \cdot (0) - 1 = 4$$

$$B = [1; 0] \quad f(B) = (1)^2 - 4 \cdot (1) + (0)^2 - 4 \cdot (0) - 1 = -4$$

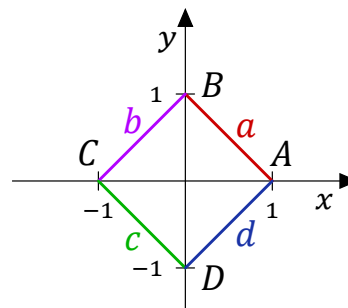
$$C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(C) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \underline{\underline{\frac{-8}{\sqrt{2}}}} \doteq -5,7 \quad \text{abs. min.}$$

$$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(D) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad f(F) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{2}}}}} \quad \text{abs. MAX}$$

5. Určete absolutní extrémy funkce: $f(x, y) : z = xy$
na množině $\mathcal{M} : |x| + |y| \leq 1$.



1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je čtverec $ABCD$, protože:

$$\mathcal{M} : |x| + |y| \leq 1$$

$$1. \text{ kvadrant: } x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow \quad \text{a : } x + y \leq 1$$

$$2. \text{ kvadrant: } x \leq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow \quad \text{b : } -x + y \leq 1$$

$$3. \text{ kvadrant: } x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow \quad \text{c : } -x - y \leq 1$$

$$4. \text{ kvadrant: } x \geq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow \quad \text{d : } x - y \leq 1$$

2. Určíme první parciální derivace funkce z a ...

$$\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 \quad z_x = y = 0$$

$$\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 \quad z_y = x = 0$$

Našli jsme jediný bod $E = [0; 0] \in \mathcal{M}$...

3. Vyšetříme situaci na hranici $\mathcal{M}$ **3.1. Hraniční úsečka** $a : y = 1 - x \wedge x \in \langle 0; 1 \rangle$ je ohraničena body $A = [1; 0]$ a $B = [0; 1]$.

$$f(x, y = 1 - x) : z = x \cdot (1 - x)$$

$$z = x - x^2$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 1 - 2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $F = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M} \dots$ **3.2. Hraniční úsečka** $b : y = x + 1 \wedge x \in \langle -1; 0 \rangle$ je ohraničena body B a $C = [-1; 0]$.

$$f(x, y = x + 1) : z = x \cdot (x + 1)$$

$$z = x^2 + x$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

A máme další bod $G = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M} \dots$ **3.3. Hraniční úsečka** $c : y = -x - 1 \wedge x \in \langle -1; 0 \rangle$ je ohraničena body C a $D = [0; -1]$.

$$f(x, y = -x - 1) : z = x \cdot (-x - 1)$$

$$z = -x^2 - x$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = -2x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

A máme další bod $H = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M} \dots$ **3.4. Hraniční úsečka** $d : y = x - 1 \wedge x \in \langle 0; 1 \rangle$ je ohraničena body A a D .

$$f(x, y = x - 1) : z = x \cdot (x - 1)$$

$$z = x^2 - x$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $J = \left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M} \dots$

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a ...

$$f(x, y) = xy$$

$$A = [1; 0] \quad f(A) = (1) \cdot (0) = 0$$

$$B = [0; 1] \quad f(B) = (0) \cdot (1) = 0$$

$$C = [-1; 0] \quad f(C) = (-1) \cdot (0) = 0$$

$$D = [0; -1] \quad f(D) = (0) \cdot (-1) = 0$$

$$E = [0; 0] \quad f(E) = (0) \cdot (0) = 0$$

$$F = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad f(F) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \quad \text{globální maximum v } F$$

$$G = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad f(G) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \quad \text{globální minimum v } G$$

$$H = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \quad f(H) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \quad \text{globální maximum v } H$$

$$J = \left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \quad f(J) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \quad \text{globální minimum v } J$$