FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Racionální (lomená) funkce rozklad na parciální zlomky

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

U mnohočlenů hraje důležitou roli rozklad na součin (lineárních či kvadratických činitelů). Podobně u racionálních lomených funkcí je v řadě aplikací důležité něco podobného. Na rozdíl od mnohočlenů, kde jde o rozklad na součin, půjde zde o rozklad na ***součet*** jednodušších racionálních lomených funkcí, které nazýváme ***parciální zlomky***. Vlastně jde o opačný postup, kterým je sčítání zlomků po převodu na společného jmenovatele.

Parciální zlomky

jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme dva typy parciálních zlomků:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } \alpha,\ A \text{ jsou reálná čísla}$$

a

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } M,\ N,\ p,\ q \text{ jsou reálná čísla a navíc } p^2-4q<0\,.$$

U prvního typu je ve jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) lineárního dvojčlenu tvaru $x-\alpha$ a v čitateli je konstanta. U druhého typu je jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) kvadratického trojčlenu tvaru x^2+px+q majícího komplexní kořeny (záporný diskriminant) a v čitateli je lineární dvojčlen (nebo konstanta, pokud je M rovno nule). ***Parciální zlomky jsou vždy ryze lomené***. A protože součet ryze lomených racionálních funkcí (parciálních zlomků) nemůže být neryze lomená racionální funkce, můžeme na parciální zlomky rozkládat pouze ryzí racionální funkce.

V případě neryzí rac. funkce $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ tuto podělíme a rozkládáme pouze zbytek po dělení $\frac{T(x)}{Q(x)}$,

kde:
$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{T(x)}{Q(x)}$$

Typy rozkladů na parciální zlomky

Nyní si ukážeme, jak lze napsat v konkrétních případech rozklady ***ryze lomené*** racionální funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Reálný jednonásobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak: $R(x) = \frac{A}{x-a}$

kde ***a*** je kořen jmenovatele dané racionální lomené funkce, ***x–a*** (**x mínus *kořen***) je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A*** je číslo (parametr), který hledáme.

Reálný n násobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{C}{(x-a)^{n-1}} + \frac{D}{(x-a)^n}$$

kde ***a*** je násobný kořen jmenovatele (s násobností n) dané racionální lomené funkce, ***x–a*** je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A*** , ***B*** , ***C*** , ***D*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice jednonásobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$$

kde ***a*** , ***b*** , ***c*** jsou koeficienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$,
A , ***B*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice n násobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2+b\cdot x+c} + \frac{Cx+D}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^2} + \ldots + \frac{Ex+F}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^{n-1}} + \frac{Gx+H}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^n}$$

kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ jsou koeficienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$,
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ jsou čísla (parametry), která hledáme.

Postup rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + \boldsymbol{a_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a_0}, a_1, \dots, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a_n} \neq 0$, $\boldsymbol{a_0} \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a_0}$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a_n}$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a_0}}{q \mid \boldsymbol{a_n}}$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za $\boldsymbol{x}$ **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna $\boldsymbol{x}$.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$ **.**

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $$R(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}.$$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x***.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x*.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + 2(x) - 1 = A \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1] + B \cdot (x) \cdot [(x)-1] + C \cdot (x) \cdot [(x)+1]$

$$x = 0: \quad (0)^2 + 2 \cdot (0) - 1 = A \cdot [(0)+1] \cdot [(0)-1] + \mathbf{0} + \mathbf{0} \Rightarrow -1 = -A \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x = 1: \quad (1)^2 + 2 \cdot (1) - 1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + C \cdot (1) \cdot [(1)+1] \Rightarrow \quad 2 = 2C \Rightarrow \quad C = 1$$

$$x = -1: \quad (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = \mathbf{0} + B \cdot (-1) \cdot [(-1)-1] + \mathbf{0} \Rightarrow -2 = 2B \Rightarrow \quad B = -1$$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny tři parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \qquad | \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad | \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) - 1 = A \cdot (x)^2 + B \cdot (x) \cdot [(x) - 1] + C \cdot [(x) - 1]$

$$
\begin{array}{llllll}
x = 0: & (0)^2 + (0) - 1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + C \cdot [(0) - 1] & \Longrightarrow & -1 = -C & \Longrightarrow & C = 1 \\
x = 1: & (1)^2 + (1) - 1 = A \cdot (1)^2 + \mathbf{0} + \mathbf{0} & \Longrightarrow & 1 = A & \Longrightarrow & A = 1 \\
x^2 \quad : & 1 = A + B & \overset{A=1}{\Longrightarrow} & 1 = 1 + B & \Longrightarrow & B = 0
\end{array}
$$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad \Big| \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{0}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \quad \Big| \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \quad | \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) + 1 = A \cdot [(x)^2 + 1] + [B \cdot (x) + C] \cdot (x)$

$$x = 0\colon \quad (0)^2 + (0) + 1 = A \cdot [(0)^2 + 1] + \mathbf{0} \quad \Longrightarrow 1 = A \quad \Longrightarrow \quad A = 1$$

$$x^2 \;: \quad 1 = A + B \quad \overset{A=1}{\Longrightarrow} 1 = 1 + B \Longrightarrow \quad B = 0$$

$$x \;: \quad 1 = C \quad \Longrightarrow \quad C = 1$$

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \qquad | \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{0 \cdot x + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $$R(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}\,.$$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $$R(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}\,.$$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.
Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D\cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F\cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2+1)^2$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za ***x*** **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné ***x*** .

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D \cdot x + E}{x^2 + 1} + \dfrac{F \cdot x + G}{(x^2 + 1)^2} \quad | \quad x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$

Určení parametrů: $x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 =$

$$= A \cdot x^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + B \cdot x \cdot (x^2 + 1)^2 + C \cdot (x^2 + 1)^2 + (D \cdot x + E) \cdot x^3 \cdot (x^2 + 1) + (F \cdot x + G) \cdot x^3$$

$x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 =$

$$= A \cdot (x^6 + 2x^4 + x^2) + B \cdot (x^5 + 2x^3 + x) + C \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) + D \cdot (x^6 + x^4) + E \cdot (x^5 + x^3) + F \cdot x^4 + G \cdot x^3$$

$$
\begin{array}{llllll}
x = 0: & 1 = C & & & \Longrightarrow & C = 1 \\
x : & 0 = B & & & \Longrightarrow & B = 0 \\
x^2 : & 2 = A + 2C & \overset{C=1}{\Longrightarrow} & 2 = A + 2 & \Longrightarrow & A = 0 \\
x^5 : & 0 = B + E & \overset{B=0}{\Longrightarrow} & 0 = 0 + E & \Longrightarrow & E = 0 \\
x^6 : & 0 = A + D & \overset{A=0}{\Longrightarrow} & 0 = 0 + D & \Longrightarrow & D = 0 \\
x^4 : & 1 = 2A + C + D + F & \overset{A,C,D}{\Longrightarrow} & 1 = 0 + 1 + 0 + F & \Longrightarrow & F = 0 \\
x^3 : & 1 = 2B + E + G & \overset{B,E}{\Longrightarrow} & 1 = 0 + 0 + G & \Longrightarrow & G = 1
\end{array}
$$

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D\cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F\cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad \Big| \quad x^3\cdot(x^2+1)^2$

Výsledek $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \dfrac{0}{x} + \dfrac{0}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{0\cdot x + 0}{x^2+1} + \dfrac{0\cdot x + 1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x)=\dfrac{x^3+14\,x^2-3\,x-24}{x^4-x^3-7\,x^2+x+6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + \boldsymbol{a_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo $(1 \leq n \in \mathbb{N})$, $\boldsymbol{a_0}, a_1, \dots, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$ jsou **celá** čísla, $(\boldsymbol{a_n} \neq 0,\ \boldsymbol{a_0} \neq 0)$ musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a_0}$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a_n}$.

Tedy: $$\alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a_0}}{q \mid \boldsymbol{a_n}}$$

Hledáme kořeny mnohočlenu $x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6\,.$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS					

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
	1				

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
		$1 \cdot (1) + (-1)$			
1	1	0			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

HS	1	−1	−7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0	−7		

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
	1				

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \;\Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

Rozklad: $\quad x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	
1	1	0	−7	−6	0	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \quad x_2 = -1 \quad$ je (druhý) kořen:

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	**-12**
-1	1	-1	-6	**0**

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \quad x_2 = -1 \quad$ je (druhý) kořen: $\quad x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**
	a	b	c	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \;\Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \quad x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	1	−6	**−12**	$\neq 0 \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***
−1	1	−1	−6	**0**	$\Rightarrow$ $x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$
	a	b	c		řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_3 = \tfrac{1+5}{2} = 3 \qquad\qquad x_4 = \tfrac{1-5}{2} = -2$$

Rozklad:

x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

$x_{1;2;3;4}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za $\boldsymbol{x}$ **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna $\boldsymbol{x}$.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

Určení parametrů po vynásobení společným jmenovatelem (dosadíme postupně kořeny):

$$x^3 + 14x^2 - 3x - 24 =$$
$$= A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)+C\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3)+D\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

$$x = 1: \quad (1)^3+14\cdot(1)^2-3\cdot(1)-24 = A\cdot[(1)+1]\cdot[(1)+2]\cdot[(1)-3]+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0} \implies -12 = -12A \implies A = 1$$
$$x = -1: \quad (-1)^3+14\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-24 = \mathbf{0}+B\cdot[(-1)-1]\cdot[(-1)+2]\cdot[(-1)-3]+\mathbf{0}+\mathbf{0} \implies -8 = 8B \implies B = -1$$
$$x = -2: \quad (-2)^3+14\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)-24 = \mathbf{0}+\mathbf{0}+C\cdot[(-2)-1]\cdot[(-2)+1]\cdot[(-2)-3]+\mathbf{0} \implies 30 = -15C \implies C = -2$$
$$x = 3: \quad (3)^3+14\cdot(3)^2-3\cdot(3)-24 = \mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+D\cdot[(3)-1]\cdot[(3)+1]\cdot[(3)+2] \implies 120 = 40D \implies D = 3$$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků:

$$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

do kterých dosadíme vypočtené parametry: $A = 1$; $B = -1$; $C = -2$; $D = 3$

Výsledek:

$$R(x) = \frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny čtyři výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28) : (2x^3 - 7x^2 + x + 10) = x^2 - 1 + \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} \\
\underline{-(2x^5 - 7x^4 + x^3 + 10x^2)} \\
\qquad -2x^3 + 10x^2 - 23x + 28 \\
\qquad \underline{-(-2x^3 + 7x^2 - x - 10)} \\
\qquad\qquad 3x^2 - 22x + 38
\end{array}
$$

Nebo jinak: $R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + \boldsymbol{a_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a_0}, a_1, \dots, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a_n} \neq 0$, $\boldsymbol{a_0} \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$$

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$.

V našem případě

$$\alpha = \frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm \frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

a kandidáty na kořeny jsou potom

$$\text{k-n-k} = \pm 1\,; \quad \pm 2\,; \quad \pm 5\,; \quad \pm 10\,; \quad \pm\frac{1}{2}\,; \quad \left(\pm\frac{2}{2} = \pm 1\right) \quad \pm\frac{5}{2}\,; \quad \left(\pm\frac{10}{2} = \pm 5\right)$$

Zlomky, které jsou tvořeny soudělnými čísly napřed zkrátíme.

Který ze všech uvedených kandidátů na kořen je skutečně kořenem, ověříme Hornerovým schématem. Z předchozího víme (důsledky základní věty algebry), že můžeme mít buď jeden reálný kořen nebo tři reálné kořeny, protože stupeň rozkládaného mnohočlenu je tři.

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$

HS	

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	−7	1	10
	2			

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
		$1 \cdot (2) + (-7)$	$1 \cdot (-5) + (1)$	$1 \cdot (-4) + (10)$
1	2	-5	-4	6

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\;2\,;\;5\,;\;10}{1\,;\;2}$

Zkoušíme postupně: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10			
1	2	−5	−4	6	$\neq 0$	$\Rightarrow$	není kořen
−1	2						

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS			

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1;\ 2;\ 5;\ 10}{1;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \implies$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS	2	−9	10
	2		

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2				

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2	2	−5	0	$x_2 = 2$ je kořen

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1) \cdot (2x^2 - 9x + 10)$$

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (2x-5)$$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2\,x-5} \;\Big|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za ***x*** **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna x.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné ***x*** **.**

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2\,x-5} \;|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)$

Určení parametrů: $3\,x^2 - 22\,x + 38 = A\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5) + B\cdot(x+1)\cdot(2\,x-5) + C\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

$x = -1 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(-1)^2 - 22\cdot(-1) + 38 = A\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5] + 0 + 0 \Longrightarrow 63 = 21A \quad\Longrightarrow\quad A = 3$

$x = 2 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(2)^2 - 22\cdot(2) + 38 = 0 + B\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5] + 0 \Longrightarrow 6 = -3B \quad\Longrightarrow\quad B = -2$

$x = 2{,}5 \;\Longrightarrow\; 3\cdot(2{,}5)^2 - 22\cdot(2{,}5) + 38 = 0 + 0 + C\cdot[(2{,}5)+1]\cdot[(2{,}5)-2] \Longrightarrow 1{,}75 = 1{,}75C \;\Longrightarrow\; C = 1$

A po dosazení

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2x-5} \;\Big|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$

Výsledek:

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{2x-5}$$

Závěrečná poznámka k rozkladu na parciální zlomky

V příkladu, kdy jsme měli rozložit NEryze lomenou racionální funkci, jsme jako odhadovaný rozklad na parciální zlomky uvedli

$$\frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2\,x-5}$$

kde třetí parciální zlomek má ve jmenovateli lineární dvojčlen $2\,x - 5$. Tedy třetí kořen je $x_3 = \frac{5}{2}$.

Přitom v úvodu jsme říkali, že parciální zlomek pro reálný kořen jmenovatele může mít pouze tvar

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

Neměli bychom odhadovaný rozklad tedy psát

$$\frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \frac{A^*}{x+1} + \frac{B^*}{x-2} + \frac{C^*}{x-\frac{5}{2}} \qquad ? \tag{1}$$

Určeme tento *„ohvězdičkovaný“* rozklad. Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů a odhadneme parciální zlomky takto upraveného zlomku. Potom (známým způsobem) určíme neznámé parametry.

- Nejprve obě dvě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem (odstraníme zlomky).
- Pak budeme postupně za $\boldsymbol{x}$ dosazovat hodnoty jednotlivých kořenů.

Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

Odhadneme parciální zlomky

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}$$

Určíme neznámé parametry: Vynásobíme obě strany rovnice členem $2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)$ (nejmenším společným jmenovatelem)

$$3\,x^2-22\,x+38=A^*\cdot 2\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{5}{2})+B^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{5}{2})+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

a upravíme:

$$3\,x^2-22\,x+38=A^*\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)+B^*\cdot(x+1)\cdot(2\,x-5)+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

Nyní dosadíme za $\boldsymbol{x}$ hodnoty celočíselných kořenů a například číslo NULA.

$x_1=-1$: $3\cdot(-1)^2-22\cdot(-1)+38=A^*\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5]+\mathbf{0}+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 63=21\,A^*\Longrightarrow A^*=3$

$x_2=2$: $3\cdot(2)^2-22\cdot(2)+38=\mathbf{0}+B^*\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5]+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 6=-3\,B^*\Longrightarrow B^*=-2$

$x=0$: $3\cdot(0)^2-22\cdot(0)+38=A^*\cdot[(0)-2]\cdot[2\cdot(0)-5]+B^*\cdot[(0)+1]\cdot[2\cdot(0)-5]+C^*\cdot 2\cdot[(0)+1]\cdot[(0)-2]$

$38=10\,A^*-5\,B^*-4\,C^*\overset{A,\,B}{\Longrightarrow} 38=10\cdot(3)-5\cdot(-2)-4\,C^*$ $\Longrightarrow -2=-4\,C^*\Longrightarrow C^*=\frac{1}{2}$

Výsledný rozklad je

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}}$$

a po úpravě

$$\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{2\,x-5}$$

Vidíme, že nám vyšel stejný rozklad zlomku $Q(x)$ jako předtím, jenom jinak zapsaný. To nás opravňuje odhadovat parciální zlomky i ve tvaru

$$\frac{A}{(\beta x-\alpha)^k}\quad \text{nebo}\quad \frac{Mx+N}{(\beta x^2+px+q)^k}\,,\qquad \text{kde } \beta\neq 0\,.$$

Použitá literatura

[1] Kuben, J., Šarmanová, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006, vi+346 s. ISBN 80–248–1192–8. [on line] ⟨http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/dp_obr.pdf⟩

[2] Rychnovský, R. *Úvod do vyšší matematiky.* Praha : Státní zemědělské nakladatelství, Praha. 1968, vydání třetí, rozšířené. 518 s.

[3] Škrášek, J. *Základy vyšší matematiky.* Praha : Naše vojsko, 1966, 382 s.