FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu
Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016 RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

1. Langrangeův interpolační mnohočlen (polynom)

je jedním ze známějších a také „snadných“ způsobů interpolace funkce zadané pouze v (nemnoha) diskrétních *bodech*. Nazýváme je ***uzlové body*** a požadujeme po nich, aby měly různé hodnoty $\boldsymbol{x_i}$. Typickým příkladem je funkce f zadaná tabulkou, ať již tato tabulka vznikla jako výsledek nějakého měření, či zda jde o tabulku hodnot některé standardní funkce získanou matematickými výpočty.

Lagrangeův $\boldsymbol{L}(x)$ mnohočlen má tvar:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x) \tag{1}$$

kde

$$L_i = \frac{\overbrace{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)}^{f(x)}}{\underbrace{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{n-1}) \cdot (x_i - x_n)}_{f(x_i)}}$$

Všimněte si, že jak v čitateli, tak ve jmenovateli je pro $\boldsymbol{i}$ vynechána závorka, ve které bychom měli odečítat člen $\boldsymbol{x_i}$.

Použití zdánlivě „nezapamatovatelného“ vzorce si ukážeme na konkrétním příkladu L 1.1.

Příklad 1.1. Máme dány čtyři body

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

, tedy $n = 4$.

Řešení: $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$ Zbývá určit jednotlivé zlomky $L_i(x)$.

Obrázek 1: Konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu (černá křivka)

x	-9	-4	-1	7
$y_1 \cdot L_1(x)$	$\mathbf{5} = (5)\cdot 1$	$\mathbf{0} = (5)\cdot 0$	$\mathbf{0} = (5)\cdot 0$	$\mathbf{0} = (5)\cdot 0$

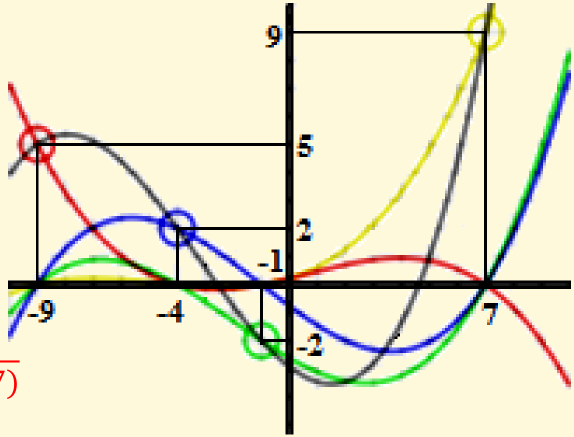
x	-9	-4	-1	7
$y_2 \cdot L_2(x)$	0	2	0	0

$L_1(-9) = 1;\quad L_1(-4) = 0;$
$L_1(-1) = 0;\quad L_1(7) = 0$

x	-9	-4	-1	7
$y_3 \cdot L_3(x)$	0	0	-2	0

x	-9	-4	-1	7
$y_4 \cdot L_4(x)$	0	0	0	9

podmínky	výsledná funkce
$L_1(-9) = 1$	$L_1(x) = 1$
$L_1(-9) = 1$ $L_1(-4) = 0$	$L_1 = 1 \cdot \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)}$
$L_1(-9) = 1$ $L_1(-4) = 0$ $L_1(-1) = 0$	$L_1 = \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)} \cdot \dfrac{x-(-1)}{(-9)-(-1)}$
$L_1(-9) = 1$ $L_1(-4) = 0$ $L_1(-1) = 0$ $L_1(\,7\,) = 0$	$L_1 = \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)} \cdot \dfrac{x-(-1)}{(-9)-(-1)} \cdot \dfrac{x-(7)}{(-9)-(7)}$



x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6x^2-55x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} =$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x+1)}{(16)\cdot(11)\cdot(8)} = \frac{1}{1408}\cdot(x^3+14\,x^2+49\,x+36)$$

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$;
pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$;
...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6x^2-55x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} = \frac{(x^2+13x+36)\cdot(x+1)}{(16)\cdot(11)\cdot(8)} = \frac{1}{1408}\cdot(x^3+14x^2+49x+36)$$

Výsledný **interpolační mnohočlen v Lagrangeově tvaru** je potom

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x) = \mathbf{5}\cdot\frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)+$$

$$+\mathbf{2}\cdot\frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)+(\mathbf{-2})\cdot\frac{-1}{192}\cdot(x^3+6x^2-55x-252)+\mathbf{9}\cdot\frac{1}{1408}\cdot(x^3+14x^2+49x+36) =$$

$$= \left[5\cdot\frac{-1}{640}+2\cdot\frac{1}{165}+(-2)\cdot\frac{-1}{192}+9\cdot\frac{1}{1408}\right]\cdot x^3 + [\ldots]\cdot x^2 + [\ldots]\cdot x + [\ldots] \doteq$$

$$\doteq 0{,}021\,x^3 + 0{,}204\,x^2 - 0{,}757\,x - 2{,}94$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} =$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} =$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} =$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} =$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} = \frac{(x^2-1)\cdot x}{(3)\cdot(2)\cdot(1)} = \frac{1}{6}\cdot(x^3-x)$$

Příklad 1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 4 body: $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$. Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} = \frac{(x^2-1)\cdot x}{(3)\cdot(2)\cdot(1)} = \frac{1}{6}\cdot(x^3-x)$$

Výsledný Lagrangeův interpolační mnohočlen je potom

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x) = (-4)\cdot\frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)+$$

$$+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2) + \mathbf{0}\cdot\frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x) + \mathbf{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot(x^3-x) =$$

$$= \left[\tfrac{4}{6}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{6}\right]\cdot x^3 + \left[\tfrac{-12}{6}+\tfrac{2}{2}\right]\cdot x^2 + \left[\tfrac{8}{6}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{-5}{6}\right]\cdot x + \left[\tfrac{-2}{2}\right] =$$

$$= \left[\tfrac{4-3+5}{6}\right]\cdot x^3 + (-2+1)\cdot x^2 + \left[\tfrac{8+3-5}{6}\right]\cdot x - 1 = \mathbf{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2 - 1{,}5\,x)$$

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)$$

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + 1\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5}+\frac{-0{,}25}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5}+\frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + 1\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5}+\frac{-0{,}25}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5}+\frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

A co když vznikne požadavek, aby mnohočlen procházel ještě dalším bodem?

Příklad 1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$	$0{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1	$-0{,}5$

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)\cdot\frac{x-0{,}5}{-1-0{,}5}$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)\cdot\frac{x-0{,}5}{0-0{,}5}$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)\cdot\frac{x-0{,}5}{1{,}5-0{,}5}$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0{,}5)-(-1)]\cdot[(0{,}5)-(0)]\cdot[(0{,}5)-(1)]}$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + 1\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5}+\frac{-0{,}25}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5}+\frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

A co když vznikne požadavek, aby mnohočlen procházel ještě dalším bodem? Pak musíme výpočty následovně doplnit.

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x)$$

2. Newtonův interpolační mnohočlen (polynom) má tvar:

$$N(x) = y_1 + y_{21} \cdot (x - x_1) + y_{321} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + y_{4321} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) + \dots \quad (2)$$

kde koeficienty $y_{21}, y_{321}, y_{4321}, \dots$ jsou ***poměrné diference*** uvedené (červeně) v následujícím schém.:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 \\
y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 \\
& y_{21} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & & y_{32} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} & & y_{43} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} & \\
& & y_{321} = \frac{y_{32} - y_{21}}{x_3 - x_1} & & y_{432} = \frac{y_{43} - y_{32}}{x_4 - x_2} & & \\
& & & y_{4321} = \frac{y_{432} - y_{321}}{x_4 - x_1} & & &
\end{array}$$

Interpolační mnohočlen $\boldsymbol{N}(x)$ zapsaný ve tvaru (2) má dvě zásadní výhody oproti Lagrangeovu tvaru:

- Především je to skutečnost, že koeficienty $y_{21}, y_{321}, y_{4321}, \dots$ ve vyjádření (2) je možné vypočítat jednou provždy a hodnoty interpolačního polynomu pro různá $\boldsymbol{x}$ pak počítat postupným dosazováním do (2).
- Druhou výhodou je to, že když k původním uzlům $x_1, x_2, \dots, x_n$ interpolace přidáme další bod $\boldsymbol{x}_{n+1}$ různý od všech ostatních uzlů, dříve spočítané koeficienty se vůbec nezmění a stačí pouze jeden další dopočítat.

U Newtonova interpolačního mnohočlenu $\boldsymbol{N}(x)$ je tak možné pohodlně zvyšovat stupeň interpolačního mnohočlenu tím, že přibíráme do výpočtu další uzly interpolace. Mnohočlen $\boldsymbol{L}(x)$ v Lagrangeově tvaru bychom museli v takovém případě sestrojovat celý znovu, jak jsme si ukázali na konci předchozího příkladu.

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9	-4	-1	7
5	2	-2	9

$N(x) = 5$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9	-4	-1	7
5	2	-2	9

$$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6$$

$N(x) = 5 \quad -0{,}6$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9	-4	-1	7
5	2	-2	9

$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6$ $\qquad$ $\frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333$

$N(x) = 5 \quad -0{,}6$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,; 5]$, $[-4\,; 2]$, $[-1\,; -2]$, $[7\,; 9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9	-4	-1	7
5	2	-2	9

$$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6 \qquad \frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333 \qquad \frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$$

$N(x) = 5 \quad -0{,}6$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body [−9 ; 5], [−4 ; 2], [−1 ;−2], [7 ; 9] jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9	-4	-1	7
5	2	-2	9

$$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6 \qquad \frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333 \qquad \frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$$

$$\frac{-1{,}333-(-0{,}6)}{-1-(-9)} \doteq -0{,}092$$

$N(x) = 5 \quad -0{,}6 \qquad -0{,}092$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9		-4		-1		7
5		2		-2		9
	$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6$		$\frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333$		$\frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$	
		$\frac{-1{,}333-(-0{,}6)}{-1-(-9)} \doteq -0{,}092$		$\frac{1{,}375-(-1{,}333)}{7-(-4)} \doteq 0{,}246$		

$N(x) = 5 \quad -0{,}6 \qquad\qquad -0{,}092$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

$$-9 \qquad\qquad -4 \qquad\qquad -1 \qquad\qquad 7$$

$$5 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad -2 \qquad\qquad 9$$

$$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6 \qquad \frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333 \qquad \frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$$

$$\frac{-1{,}333-(-0{,}6)}{-1-(-9)} \doteq -0{,}092 \qquad \frac{1{,}375-(-1{,}333)}{7-(-4)} \doteq 0{,}246$$

$$\frac{0{,}246-(-0{,}092)}{7-(-9)} \doteq 0{,}021$$

$$N(x) = 5 \quad -0{,}6 \qquad -0{,}092 \qquad 0{,}021$$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body [−9 ; 5], [−4 ; 2], [−1 ;−2], [7 ; 9] jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9		-4		-1		7
5		2		-2		9
	$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6$		$\frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333$		$\frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$	
		$\frac{-1{,}333-(-0{,}6)}{-1-(-9)} \doteq -0{,}092$		$\frac{1{,}375-(-1{,}333)}{7-(-4)} \doteq 0{,}246$		
			$\frac{0{,}246-(-0{,}092)}{7-(-9)} \doteq 0{,}021$			

Výsledný interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru je potom (zaokr. na 3 des. m.):

$N(x) = 5 + (-0{,}6)\cdot[x-(-9)] + (-0{,}092)\cdot[x-(-9)]\cdot[x-(-4)] + (0{,}021)\cdot[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)] =$

$$N(x) = 0{,}021 \cdot x^3 + 0{,}202 \cdot x^2 - 0{,}767 \cdot x - 2{,}956$$

Příklad 2.1. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-9\,;5]$, $[-4\,;2]$, $[-1\,;-2]$, $[7\,;9]$ jako v příkladu L 1.1. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází. Nejprve si souřadnice bodů opět přepíšeme do (roztažené) tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-9 $\quad -4 \quad -1 \quad 7$

$5 \quad 2 \quad -2 \quad 9$

$$\frac{2-(5)}{-4-(-9)} = -0{,}6 \qquad \frac{-2-(2)}{-1-(-4)} \doteq -1{,}333 \qquad \frac{9-(-2)}{7-(-1)} = 1{,}375$$

$$\frac{-1{,}333-(-0{,}6)}{-1-(-9)} \doteq -0{,}092 \qquad \frac{1{,}375-(-1{,}333)}{7-(-4)} \doteq 0{,}246$$

$$\frac{0{,}246-(-0{,}092)}{7-(-9)} \doteq 0{,}021$$

Výsledný interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru je potom (zaokr. na 3 des. m.):

$N(x) = 5+(-0{,}6)\cdot[x-(-9)]+(-0{,}092)\cdot[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]+(0{,}021)\cdot[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)] =$

$= 5-0{,}6\cdot(x+9)-0{,}092\cdot(x+9)\cdot(x+4)+0{,}021\cdot(x+9)\cdot(x+4)\cdot(x+1) =$

$= 5-0{,}6\cdot(x+9)-0{,}092\cdot(x^2+9\,x+4\,x+36)+0{,}021\cdot(x^2+13\,x+36)\cdot(x+1) =$

$= 5-0{,}6\cdot(x+9)-0{,}092\cdot(x^2+13\,x+36)+0{,}021\cdot(x^3+13\,x^2+36\,x+x^2+13\,x+36) =$

$= (0{,}021)\cdot x^3+[-0{,}092+0{,}021\cdot 14]\cdot x^2+[-0{,}6-0{,}092\cdot 13+0{,}021\cdot 49]\cdot x+$

$+(5-0{,}6\cdot 9-0{,}092\cdot 36+0{,}021\cdot 36) =$

$$N(x) = 0{,}021\cdot x^3+0{,}202\cdot x^2-0{,}767\cdot x-2{,}956$$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-1	0	1	2
-4	-1	0	5

$N(x) = -4$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,; -4]$, $[0\,; -1]$, $[1\,; 0]$, $[2\,; 5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-1		0		1		2
-4		-1		0		5
	$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3$					

$N(x) = -4 \quad 3$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-1	0	1	2
-4	-1	0	5

$$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3 \qquad \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1$$

$N(x) = -4 \quad 3$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-1		0		1		2
-4		-1		0		5
	$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3$		$\frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1$		$\frac{5-(0)}{2-(1)} = 5$	

$N(x) = -4 \quad 3$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

$$\begin{array}{ccccccc}
-1 & & 0 & & 1 & & 2 \\
-4 & & -1 & & 0 & & 5 \\
 & \frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3 & & \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1 & & \frac{5-(0)}{2-(1)} = 5 & \\
 & & \frac{1-(3)}{1-(-1)} = -1 & & & &
\end{array}$$

$N(x) = -4 \quad 3 \quad -1$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

-1		0		1		2
-4		-1		0		5
	$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3$		$\frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1$		$\frac{5-(0)}{2-(1)} = 5$	
		$\frac{1-(3)}{1-(-1)} = -1$		$\frac{5-(1)}{2-(0)} = 2$		

$N(x) = -4 \quad 3 \qquad -1$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & & 0 & & 1 & & 2 \\
-4 & & -1 & & 0 & & 5 \\
 & \frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3 & & \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1 & & \frac{5-(0)}{2-(1)} = 5 & \\
 & & \frac{1-(3)}{1-(-1)} = -1 & & \frac{5-(1)}{2-(0)} = 2 & & \\
 & & & \frac{2-(-1)}{2-(-1)} = 1 & & &
\end{array}
$$

$N(x) = -4 \quad 3 \qquad -1 \qquad 1$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & & 0 & & 1 & & 2 \\
-4 & & -1 & & 0 & & 5 \\
 & \frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3 & & \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1 & & \frac{5-(0)}{2-(1)} = 5 & \\
 & & \frac{1-(3)}{1-(-1)} = -1 & & \frac{5-(1)}{2-(0)} = 2 & & \\
 & & & \frac{2-(-1)}{2-(-1)} = 1 & & &
\end{array}
$$

Výsledný interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru je potom:

$$N(x) = -4 + (3)\cdot[x-(-1)] + (-1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)] + (1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)] =$$

$$N(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Příklad 2.2. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 4 body $[-1\,;-4]$, $[0\,;-1]$, $[1\,;0]$, $[2\,;5]$ jako v příkladu L 1.2. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

Nejprve si souřadnice přepíšeme do následující tabulky, do které postupně doplníme i poměrné diference.

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & & 0 & & 1 & & 2 \\
-4 & & -1 & & 0 & & 5 \\
 & \frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3 & & \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1 & & \frac{5-(0)}{2-(1)} = 5 & \\
 & & \frac{1-(3)}{1-(-1)} = -1 & & \frac{5-(1)}{2-(0)} = 2 & & \\
 & & & \frac{2-(-1)}{2-(-1)} = 1 & & &
\end{array}
$$

Výsledný interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru je potom:

$$N(x) = -4 + (3)\cdot[x-(-1)] + (-1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)] + (1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)] =$$

$$= -4 + 3\cdot(x+1) - (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot x\cdot(x-1) = -4 + 3x + 3 - x^2 - x + x^3 - x =$$

$$N(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2$$

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5$$

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

$$-1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1{,}5$$

$$2{,}25 \qquad\qquad 0{,}25 \qquad\qquad 1$$

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad\qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-2)}{1{,}5-(-1)} = 1$$

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-2)}{1{,}5-(-1)} = 1$$

$$N(x) = 2{,}25 + (-2)\cdot[x-(-1)] + (1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)] = 2{,}25 - 2\,x - 2 + x^2 + x =$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 2.3. — Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány stejné 3 body jako v příkladu L 1.3. Určete mnohočlen v Newtonově tvaru, který všemi prochází.

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-2)}{1{,}5-(-1)} = 1$$

$$N(x) = 2{,}25 + (-2)\cdot[x-(-1)] + (1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)] = 2{,}25 - 2\,x - 2 + x^2 + x =$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 2.3. — jiné pořadí uzlových bodů v tabulce

-1	$1{,}5$	0
$2{,}25$	1	$0{,}25$

$$\frac{1-(2{,}25)}{1{,}5-(-1)} = -0{,}5 \qquad \frac{0{,}25-(1)}{0-(1{,}5)} = 0{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-0{,}5)}{0-(-1)} = 1$$

$$N(x) = 2{,}25 + (-0{,}5)\cdot[x-(-1)] + (1)\cdot[x+1]\cdot[x-(1{,}5)] = 2{,}25 - 0{,}5\,x - 0{,}5 + x^2 - 0{,}5\,x - 1{,}5 =$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 2.3. — ještě jiné pořadí uzlových bodů v tabulce

0	-1	$1{,}5$
$0{,}25$	$2{,}25$	1

$$\frac{2{,}25-(0{,}25)}{-1-(0)} = -2 \qquad \frac{1-(2{,}25)}{1{,}5-(-1)} = -0{,}5$$

$$\frac{-0{,}5-(-2)}{1{,}5-(0)} = 1$$

$$N(x)=0{,}25+(-2)\cdot[x-(0)]+(1)\cdot[x-(0)]\cdot[x-(-1)]=$$

$$= 0{,}25 - 2\,x + x^2 + x$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

0	$1{,}5$	-1
$0{,}25$	1	$2{,}25$

$$\frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5 \qquad \frac{2{,}25-(1)}{-1-(1{,}5)} = -0{,}5$$

$$\frac{-0{,}5-(0{,}5)}{-1-(0)} = 1$$

$$N(x)=0{,}25+(0{,}5)\cdot[x-(0)]+(1)\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]=$$

$$= 0{,}25 + 0{,}5\,x + x^2 - 1{,}5\,x$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

$1{,}5$	-1	0
1	$2{,}25$	$0{,}25$

$$\frac{2{,}25-(1)}{-1-(1{,}5)} = -0{,}5 \qquad \frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2$$

$$\frac{-2-(-0{,}5)}{0-(1{,}5)} = 1$$

$$N(x)=1+(-0{,}5)\cdot[x-(1{,}5)]+(1)\cdot[x-(1{,}5)]\cdot[x-(-1)]=$$

$$= 1 - 0{,}5\,x + 0{,}75 + x^2 - 0{,}5\,x - 1{,}5$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

$1{,}5$	0	-1
1	$0{,}25$	$2{,}25$

$$\frac{0{,}25-1}{0-(1{,}5)} = 0{,}5 \qquad \frac{2{,}25-(0{,}25)}{-1-(0)} = -2$$

$$\frac{-2-(0{,}5)}{-1-(1{,}5)} = 1$$

$$N(x)=1+(0{,}5)\cdot[x-(1{,}5)]+(1)\cdot[x-(1{,}5)]\cdot[x-(0)]=$$

$$= 1 + 0{,}5\,x - 0{,}75 + x^2 - 1{,}5\,x$$

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

Poznámka: Ukázali jsme, že výsledný tvar mnohočlenu naprosto nezáleží na pořadí bodů zapisovaných do tabulky. [6, str. 30]

Příklad 2.3. **– příklad 1.3.**

-1	0	$1{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-2)}{1{,}5-(-1)} = 1$$

$$N(x) = 2{,}25+(-2)\cdot[x-(-1)]+(1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)]$$

$$= 2{,}25 - 2\,x - 2 + x^2 + x$$

= výsledek původního příkladu

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 2.3. — přidání dalšího uzlového bodu – příklad 1.3.

-1	0	$1{,}5$	$0{,}5$
$2{,}25$	$0{,}25$	1	$-0{,}5$

$$\frac{0{,}25-(2{,}25)}{0-(-1)} = -2 \qquad \frac{1-(0{,}25)}{1{,}5-(0)} = 0{,}5 \qquad \frac{-0{,}5-(1)}{0{,}5-(1{,}5)} = 1{,}5$$

$$\frac{0{,}5-(-2)}{1{,}5-(-1)} = 1 \qquad \frac{1{,}5-(0{,}5)}{0{,}5-(0)} = 2$$

$$\frac{2-(1)}{0{,}5-(-1)} = \frac{2}{3}$$

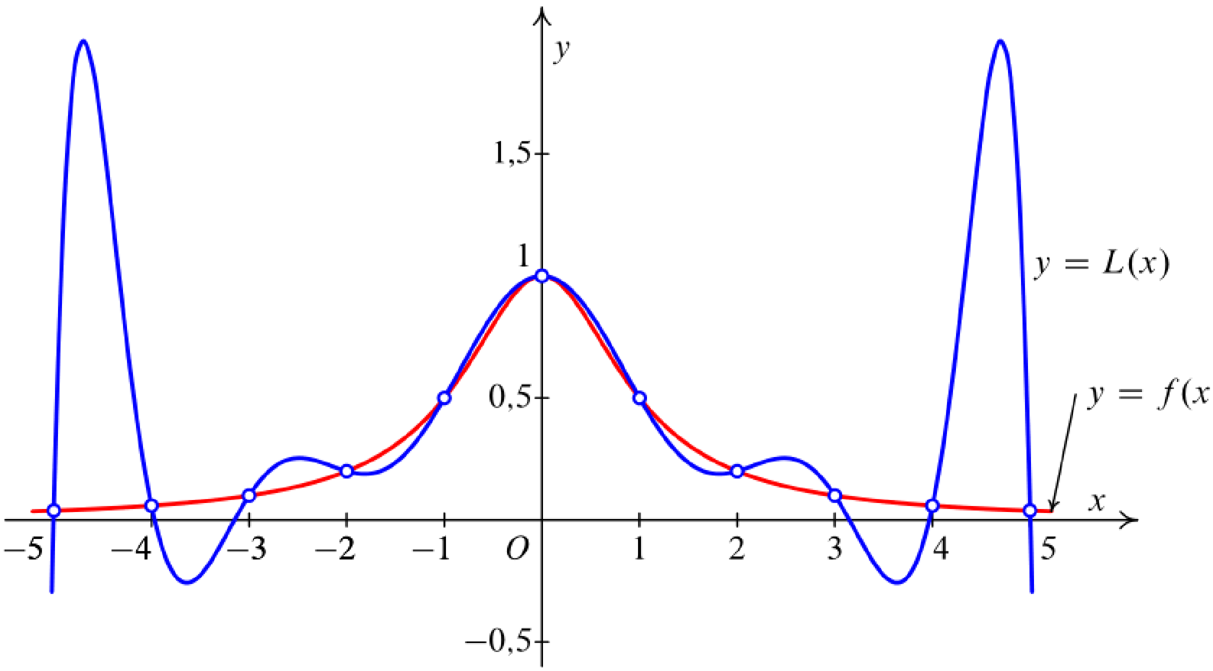
$$N(x) = 2{,}25 + (-2)\cdot[x-(-1)] + (1)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)] + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)] =$$

$= 2{,}25 - 2\,x - 2 + x^2 + x + \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot x^2 - x^2 - x$ = výsledek původního příkladu + dodatek

$$N(x) = x^2 - x + 0{,}25 + \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot x^2 - x^2 - x =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{3}\cdot x^2 - 2\,x + 0{,}25$$

3. Závěrečná poznámka



Obr. 4.3: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ a interpolačního polynomu $L(x)$

Jak je zřejmé z předchozího obrázku uvedeného v práci [4], nestačí se při studiu průběhu funkce $f(x)$ omezit pouze na mnohočleny. Mnohočlen $L(x)$ (na předchozím obrázku modře) popisuje chování racionální funkce $f(x)$ (na obrázku červeně) na intervalu:

(-1,1 ; 1,1) dostatečně výstižně

(-3,9 ; -3,3) ne moc uspokojivě

a na intervalu například **(6 ; ∞)** je naproto *mimo mísu*.

Použitá literatura

[1] Černá, R., Machalický, M., Vogel, J., Zlatník, Č. *Základy numerické matematiky a programování.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Celostátní vysokoškolská učebnice pro strojní, elektrotechnické a stavební fakulty vysokých škol technických, Praha 1987, 448 s.

[2] Dalík, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨[https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp]⟩

[3] Diblík, J., Baštinec, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[4] Kuben, J., Račková, P. *Numerické metody.* Univerzita obrany, [Dostupné z adresy:] ⟨https://moodle.unob.cz/course/view.php?id=1169⟩

[5] Pospíšil, I., Vondrák, V. *Numerické metody I.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2011, 191 s. [on line] ⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf⟩

[6] Přikryl, P. *Numerické metody matematické analýzy.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit XXIV, Praha, 1985, 192 s.