Příklad 5.4. Nalezněte rovnici tečné roviny plochy $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí $x(y+z)+z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou ρ : $3x-2y+6z=2$. V dotykovém bodě určete rovnici normály.

(*Poznámka. Nejprve vyřešte Příklad 5.3.*)

Řešení. Nechť $A=[a_1,a_2,a_3]$ je bod dotyku hledané roviny τ a n je hledaná normála. Pak platí $F(A)=0$, a dále

$$\tau:\ F'_x(A)(x-a_1)+F'_y(A)(y-a_2)+F'_z(A)(z-a_3)=0, \tag{1}$$

kde $F(x,y,z)\equiv x(y+z)+z^2-1$. Ze splnění podmínky $A\in\tau$ dostáváme první rovnici pro neurčité a_1,a_2,a_3

$$a_1(a_2+a_3)+a_3^2=1. \tag{2}$$

Protože $\rho\parallel\tau$, musí existovat nějaká, zatím neurčitá, konstanta $k\neq 0$ tak, že

$$\vec{n}_\tau = k\cdot\vec{n}_\rho, \tag{3}$$

kde $\vec{n}_\tau$ je normálový vektor roviny τ a $\vec{n}_\rho$ je normálový vektor roviny ρ. Rozepíšeme-li rovnost (2) v souřadnicích, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_2+a_3 &= 3k\\ a_1 &= -2k\\ a_1+2a_3 &= 6k \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $\vec{n}_\tau=\Big(F'_x(A),F'_y(A),F'_z(A)\Big)$ (viz Příklad 5.3), a po úpravě máme

$$a_1=-2k,\ a_2=-k,\ a_3=4k. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), dostáváme kvadratickou rovnici pro neurčitou k, která má kořeny $k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Vztahy (4) pak dávají souřadnice dvou dotykových bodů: $A_1=\left[-\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$ a $A_2=\left[\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right]$. Pak platí

$$\tau_1:\ 3x-2y+6z-2\sqrt{10}=0,\quad \tau_2:\ 3x-2y+6z+2\sqrt{10}=0$$

kde využíváme $\tau\perp\vec{n}_\rho$, a dále

$$\begin{aligned} n_1 &:\quad x=-\frac{\sqrt{10}}{5}+3t, y=-\frac{\sqrt{10}}{10}-2t, z=\frac{2\sqrt{10}}{5}+6t,\quad t\in\mathbf{R};\\ n_2 &:\quad x=\frac{\sqrt{10}}{5}+3t, y=\frac{\sqrt{10}}{10}-2t, z=-\frac{2\sqrt{10}}{5}+6t,\quad t\in\mathbf{R}. \end{aligned}$$

Komentář.

Obecná rovnice roviny $\rho\subset\mathbf{E}_3$ dané bodem $A=[a_1,a_2,a_3]\in\rho$ a normálovým vektorem $\vec{n}_\rho=(n_1,n_2,n_3)\perp\rho$ je dána vzorcem

$$n_1\cdot(x-a_1)+n_2\cdot(y-a_2)+n_3\cdot(z-a_3)=0.$$