Příklad 3.2. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} z'_x &\overset{(1)}{=} z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \\ &= (2uv - v^2)\cdot u'_x + (u^2 - 2uv)\cdot v'_x \\ &= u^2 \cdot v'_x + 2uv(u'_x - v'_x) - v^2 \cdot u'_x; \end{aligned}$$

a podobně pro y

$$z'_y \overset{(1)}{=} u^2 \cdot v'_y + 2uv(u'_y - v'_y) - v^2 \cdot u'_y.$$

Dále po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} z'_x &= x^2\cos^2 \sin y + 2x^2 \sin y \cos^2 y - 2x^2 \sin^2 y \cos y - x^2 \sin^2 y \cos y \\ &= 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} z'_y &= x^3\cos^3 - 2x^2 \sin y \cos y (x\sin y + x\cos y) + x^3 \sin^3 y \\ &= x^3[\sin^3 y + \cos^3 y - 2\sin y \cos y(\sin y + \cos y)] \\ &\overset{(2)}{=} x^3(\sin y + \cos y)(\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin y \cos y) \\ &\overset{(3)}{=} x^3(\sin y + \cos y)(1 - 3\sin y \cos y). \end{aligned}$$

Pro výpočet bylo použito těchto vzorců a dílčích úprav

(1) *Vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných*

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \\ z'_y &= z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y \end{aligned}$$

kam budeme dosazovat následující

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} z'_u &=& 2uv - v^2 & u'_x &=& \cos y & u'_y &=& -x\sin y \\ z'_v &=& u^2 - 2uv & v'_x &=& \sin y & v'_y &=& x\cos y \end{array}$$

(2) *Vzorec pro součet třetích mocnin a jeho použití*

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2).$$

Položíme-li $A = \sin x$ a $B = \cos x$, dostáváme

$$\sin^3 y + \cos^3 y = (\sin y + \cos y)(\sin^2 y - \sin y \cos y + \cos^2 y),$$

a dále

$$\begin{aligned} \sin^3 y \quad + & \quad \cos^3 y - 2 \sin y \cos y \, (\sin y + \cos y) \\ = & \quad (\sin y + \cos y) \, [(\sin^2 y - \sin y \cos y + \cos^2 y) - 2 \sin y \cos y] \\ = & \quad (\sin y + \cos y) \, (\sin^2 y + \cos^2 y - 3 \sin y \cos y); \end{aligned}$$

(3) *Základní goniometrická identita*

$$\sin^2 y + \cos^2 y \equiv 1.$$