MATEMATIKA BA002 - Test 4
I. ročník kombinovaného studia

Příklad 1. Ukažte, že funkce $z(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ vyhovuje Laplaceově rovnici $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Příklad 2. Zjistětě, zda funkce $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici pro vedení tepla $u''_{xx} - \frac{1}{a^2}u'_t = 0$.

Příklad 3. Vypočtěte $d^2 f(A, \vec{u})$ funkce $f(x,y) = \sin x \sin y$, je-li:

a) $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],\ \vec{u} = (dx, dy)$;

b) $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],\ B = [x,y],\ \vec{u} = \vec{AB}$.

Příklad 4. Určete Taylorův polynom funkce f stupně n v bodě A, je-li:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y),\ A = [0,0],\ n = 2$;

b) $f(x,y) = x^y,\ A = [1,1],\ n = 3$.

Příklad 5. Určete rovnici tečné roviny a normály v bodě T, gradient v bodě A a derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě A funkce f:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy,\ T = [3,4,?],\ A = [3,4],\ \vec{s} = (3,4)$;

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ T = [1,1,?],\ A = [1,1],\ \vec{s} = (1,1)$.

Příklad 6. Nalezněte lokální extrémy funkce

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

b) $f(x,y) = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$.

Příklad 7. Určete $y\prime$ funkce y dané implicitně rovnicí $3x^2y^2 + x\cos y = 0$.

Příklad 8. Zjistětě, zda je funkce y daná implicitně rovnicí $y \sin x + x^2 + y^3 = 1$ v bodě $x = 0$ rostoucí a konvexní.

Příklad 9. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce y dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ v bodě $T=[1,0]$ ležícím na grafu.

Výsledky:

1. vyhovuje **2.** vyhovuje **3. a)** $d^2f(A,\vec{u}) = \frac{1}{2}d^2x + dxdy + \frac{1}{2}d^2y$ **b)** $d^2f(A,\vec{u}) = \frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{4})^2 + (x+\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2$ **4. a)** $T_2(x,y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$ **b)** $T_3(x,y) = 1 + x + xy + \frac{1}{2}x^2y$ **5. a)** $\tau: 17x + 11y - 5z - 60 = 0,\ n: x = 3 + 17t,\ y = 4 + 11t,\ y = -7 - 5t,\ t \in R, \operatorname{grad} f(A) = (-\frac{17}{5}, -\frac{11}{5}),\ \frac{dF(A)}{d\vec{s}} = -\frac{19}{5}$ b) $\tau: x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0,\ n: x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ y = \frac{\pi}{4} + 2t,\ t \in R, \operatorname{grad} f(A) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \frac{dF(A)}{d\vec{s}} = 0$ **6. a)** V bodě $S = [\frac{1}{2}, -1]$ nastane ostré lokální minimum. b) V bodě $S_1 = [0,0]$ nelze rozhodnout, v bodě $S_2 = [-3,0]$ nastane ostré lokální maximum, v bodě $S_3 = [-1,2]$ lokální extrém nenastává. **7.** $y'(x) = \frac{6xy^2 + \cos y}{x \sin y - 6x^2y}$ **8.** Funkce y je v bodě 0 klesající ($y'(0) = -\frac{1}{3}$) a konkávní ($y''(0) = -\frac{2}{3}$) **9.** $t: y = x - 1,\ n: y = -x + 1$.

Příklad	1	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7	8	9
Body	10	10	5	5	10	20	10	10	20	20	10	20	10