DISKRÉTNÍ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- využití: prokládání dat křivkami, řešení přeurčených systémů lineárních rovnic
- nahrazení požadavku $F(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ slabším požadavkem

$$(F(x_0) - f(x_0))^2 + (F(x_1) - f(x_1))^2 + \ldots (F(x_n) - f(x_n))^2 \to \min$$

- obecná formulace úlohy: Pro dané vektory $\varphi \in \mathbb{R}^k$ a $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, $n < k$ najděte koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že pro vektor $\varphi^* = c_1\varphi^{(1)} + \cdots + c_n\varphi^{(n)}$ je norma $\|\varphi - \varphi^*\|_2$ minimální.
- konstrukce: neznámé koeficienty $c_1, c_2 \ldots, c_n$ dostáváme jako řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. *normálních rovnic*:

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}\rangle & \langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\rangle & \cdots & \langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(n)}\rangle \\ \langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\rangle & \langle\varphi^{(2)}, \varphi^{(2)}\rangle & \cdots & \langle\varphi^{(2)}, \varphi^{(n)}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle\varphi^{(1)}, \varphi^{(n)}\rangle & \langle\varphi^{(2)}, \varphi^{(n)}\rangle & \cdots & \langle\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi, \varphi^{(1)}\rangle \\ \langle\varphi, \varphi^{(2)}\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi, \varphi^{(n)}\rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$

- *Pozn. 1.* Při návrhu aproximace bychom měli aproximační funkci vybírat tak, aby vektory $\varphi^{(i)}$ byly lineárně nezávislé, v opačném případě by měla soustava (1) nekonečně mnoho řešení.
  Pozn. 2. Za předpokladu, že jsou vektory $\varphi^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ lineárně nezávislé, matice soustavy (1) je symetrická a pozitivně definitní $\to$ soustava (1) lze efektivně řešit např. Choleského metodou.

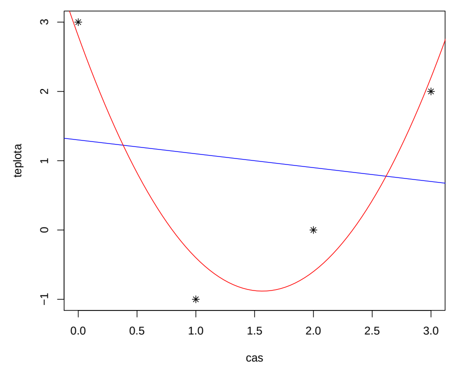
Příklad. Pro zadané hodnoty najděte vztah popisující závislost teploty na čase zjištěnou měřením zaznamenaným v tabulce. Aproximujte

a) lineárním,

b) kvadratickým polynomem.

Vypočítejte normu vektoru chyb výsledné aproximace v daných uzlech.

i	0	1	2	3
čas	0	1	2	3
teplota	3	-1	0	2



Řešení.

Příklad. Metodou nejmenších čtverců řešte přeurčenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- skalární součiny:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle &= 3 \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 6 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle &= -1 \end{aligned}$$

- systém normálních rovnic:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- odhad $\varphi^* = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^T$
- chyba aproximace: $\|\varphi - \varphi^*\|_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 1.8708$