

INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- aproximace zadaných hodnot nebo hledané funkce f funkcí $F(x)$ (polynomem)
- F musí být k f "co nejbliže"
- značení: $\mathcal{P}^{(n)}$... množina všech polynomů stupně $\leq n$

ÚLOHA LAGRANGEOVY INTERPOLACE

- značení:
 $x_0, x_1, \dots, x_n$... vzájemně různé body (uzly)
 $y_0, y_1, \dots, y_n$... dané hodnoty
 $F(x)$... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$

- interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

Řešení lze popsat rekurzivním způsobem pomocí poměrných diferencí prvního, druhého, ... n -tého řádu – výpočet pomocí tabulky poměrných diferencí si ukážeme na cvičení.

ÚLOHA HERMITEOVY INTERPOLACE

- značení:
 $x_0, x_1, \dots, x_n$... vzájemně různé body (uzly)
 $y_0, y_1, \dots, y_n$... dané hodnoty
 $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$... dané hodnoty první derivace
 $F(x)$... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$\begin{aligned} F(x_i) &= y_i \\ F'(x_i) &= y'_i, i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

- interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$H(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic (stejnou jako výše), přičemž každý uzel se v dané soustavě objevuje dvakrát a poměrné difference tvaru $\left| \frac{0}{0} \right|$ jsou nahrazeny zadanými derivacemi.

Příklad. Pro zadané hodnoty sestrojte

- a) interpolační polynom v Newtonově tvaru,
- b) Hermiteův interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16
y'_i	-1	-4	92

Řešení.

Příklad. Hodnotu $\sqrt[3]{1.05}$ aproximujte hodnotou

a) Newtonova

b) Hermiteova

interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v uzlech $x_0 = 1$ a $x_1 = 1.2$. V obou případech určete absolutní chybu aproximace. Zaokrouhlete na 6 desetinných míst.

a) Úloha Lagrangeovy interpolace, interpolační polynom v Newtonově tvaru:

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$
0	1	1	$\frac{1.062659 - 1}{1.2 - 1} = 0.3133295$
1	1.2	1.062659	—

Newtonův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + 0.3133295 \cdot (x - 1) \\ N(1.05) &= 1 + 0.3133295 \cdot (1.05 - 1) \doteq 1.015665 \\ \sqrt[3]{1.05} &\doteq 1.016396 \end{aligned}$$

odhad absolutní chyby: $|N(1.05) - \sqrt[3]{1.05}| = -7.31 \cdot 10^{-4}$

b) Úloha Hermiteovy interpolace, interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	1	1	$f'(1) = 0.333333$	$\frac{0.313295 - 0.333333}{1.2 - 1} = -0.10019$	$\frac{-0.09056 + 0.10019}{1.2 - 1} = 0.04815$
1	1	1	$\frac{1 - 1.062659}{1 - 1.2} = 0.313295$	$\frac{0.295183 - 0.313295}{1.2 - 1} = -0.09056$	—
2	1.2	1.062659	$f'(1.2) = 0.295183$	—	—
3	1.2	1.062659	—	—	—

Hermiteův interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$\begin{aligned} H(x) &= 1 + 0.333333(x - 1) - 0.10019(x - 1)^2 + 0.04815(x - 1)^2(x - 1.2) \\ H(1.05) &= 1 + 0.333333(1.05 - 1) - 0.10019(1.05 - 1)^2 + 0.04815(1.05 - 1)^2(1.05 - 1.2) = 1.016398 \\ \sqrt[3]{1.05} &\doteq 1.016396 \end{aligned}$$

odhad absolutní chyby: $|H(1.05) - \sqrt[3]{1.05}| = 1.99 \cdot 10^{-6}$