JACOBIOVA A GAUSSOVA-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

s regulární maticí soustavy A.
Princip iteračních metod: převést soustavu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na systém $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ s iterační maticí T.
Iterační proces:

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = T\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{d},$$

vhodnou volbou iterační matice T dostáváme konkrétní iterační metodu.
Rozklad matice soustavy A:

$$A = D + L + U,$$

kde D značí diagonální matici, L dolní trojúhelníkovou matici bez diagonály a U horní trojúhelníkovou matici bez diagonály:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

JACOBIOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ D\boldsymbol{x} &= -(L + U)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= -D^{-1}(L + U)\boldsymbol{x} + D^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{T_J}\boldsymbol{x}^{(i)} + \underbrace{D^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{d}_J}$$

s iterační maticí T_J.

GAUSS-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L)\boldsymbol{x} &= -U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= -(D + L)^{-1}U\boldsymbol{x} + (D + L)^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \underbrace{-(D + L)^{-1}U}_{T_{GS}}\boldsymbol{x}^{(i)} + \underbrace{(D + L)^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{d}_{GS}}$$

s iterační maticí T_{GS}.

Konvergence metod:

- A ryze řádkově diagonálně dominantní:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad i = 1, \ldots, n$$

  A - ryze řádkově diagonálně dominantní $\Rightarrow$ konvergence pro libovolnou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

- Iterační posloupnost $\boldsymbol{x}^{(i)}$ konverguje k přesnému řešení systému lineárních rovnic, existuje-li norma matic $\|\cdot\|$ souhlasná s normou vektorů tak, že $\|T\| < 1$.

Příklad. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \; + x_3 \; &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \; &= 4 \\ -x_1 - x_2 \; - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x} = (0, 0, 0)^T$ a $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.
- Jacobiova metoda:

i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_\infty$	i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_1$	i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	1.0000	1	0.6667	1.0000	0.3333	2.0000	1	0.6667	1.0000	0.3333	1.2472
2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.5555	2	0.2222	0.5833	-0.2222	1.4167	2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.8245
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.3612	3	0.5463	0.9445	0.0648	0.9723	3	0.5463	0.9445	0.0648	0.5638
⋮					⋮					⋮				
19	0.4234	0.8081	-0.0766	0.0009	22	0.4230	0.8076	-0.0770	0.0007	21	0.4232	0.8079	-0.0768	0.0007

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_\infty$	i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_1$	i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.6667	1	0.6667	0.6667	-0.1111	1.4445	1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.9494
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.1852	2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.3271	2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.2219
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0473	3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0753	3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0516
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0094	4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0139	4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0099
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0015	5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0022	5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0016
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002	6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0003	6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002

Příklad. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= -13 \\ 10x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 3 \\ x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -5 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x} = (0,0,0)^T$ a $\varepsilon = 0.1$.

Řešení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \end{pmatrix} \ldots \text{nejedná se o ryze diagonálně dominantní matici}$$

$\Rightarrow$ budeme uvažovat matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ a vektor pravé strany $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$

- Jacobiova metoda

i	x_1	x_2	x_3	chyba_Inf
0	0.0000	0.0000	0.0000	--
1	0.3000	-0.4167	1.6250	1.6250
2	1.2792	0.9125	1.4021	1.3292
3	0.6361	0.6451	2.3552	0.9531
4	1.2196	1.4930	2.1077	0.8479
5	0.7566	1.2381	2.7106	0.6029
6	1.1601	1.7791	2.4934	0.5410
7	0.8351	1.5645	2.8820	0.3886
8	1.1152	1.9154	2.7072	0.3509
9	0.8874	1.7464	2.9615	0.2543
10	1.0822	1.9773	2.8274	0.2309
11	0.9228	1.8493	2.9961	0.1687
12	1.0583	2.0032	2.8962	0.1539
13	0.9468	1.9086	3.0093	0.1131
14	1.0412	2.0122	2.9362	0.1036
15	0.9632	1.9434	3.0128	0.0780

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	x_1	x_2	x_3	chyba_Inf
0	0.0000	0.0000	0.0000	--
1	0.3000	-0.4417	1.3865	1.3865
2	1.1699	0.6413	2.1720	1.0830
3	1.1295	1.2992	2.5782	0.6579
4	1.0694	1.6427	2.7854	0.3435
5	1.0356	1.8182	2.8908	0.1755
6	1.0181	1.9075	2.9444	0.0893

[verze: 25. *X.* 2016]