ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC SE SYMETRICKÝMI POZITIVNĚ DEFINITNÍMI MATICEMI

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

se symetrickou pozitivně definitní maticí soustavy A.
Pozitivně definitní matice: všechny hlavní minory (determinanty všech čtvercových submatic) jsou kladné.
Tvrzení. Je-li A symetrická pozitivně definitní matice, pak existuje horní trojúhelníková matice U s kladnými prvky na diagonále taková, že

$$A = U^T U.$$

Toto vyjádření se nazývá CHOLESKÉHO ROZKLAD matice A.

Postupným porovnáním prvků na obou stranách soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

dostáváme vyjádření prvků matice $U = (u_{ij})$ v obecném tvaru:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \quad j = 2, \dots, n, \\ u_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 2, \dots, n, \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}), \qquad i < j, \\ u_{ij} &= 0, \qquad i > j. \end{aligned}$$

Řešení systému lineárních rovnic pak nastává ve dvou krocích:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ U^T \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{z}} &= \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad 1.\ U^T\mathbf{z} = \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{z} \\ & \qquad\qquad\quad 2.\ U\mathbf{x} = \mathbf{z} \longrightarrow \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Příklad. Choleského metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 &= 20. \end{aligned}$$

Příklad. Choleského metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení.

- ověření podmínek:
  - A symetrická
  - $|A_1| = 1 > 0$, $|A_2| = 4 > 0$, $|A_3| = 16 > 0$
- konstrukce matice U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &1 = u_{11}^2 \Rightarrow u_{11} = 1 \\ &2 = u_{11} \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = 2 \\ &1 = u_{11} \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = 1 \\ &8 = u_{12}^2 + u_{22}^2 \Rightarrow u_{22} = \sqrt{8 - u_{12}^2} = \sqrt{4} = 2 \\ &4 = u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{1}{u_{22}} (4 - u_{12} \cdot u_{13}) = \frac{1}{2} (4 - 2) = 1 \\ &6 = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \Rightarrow u_{33} = \sqrt{6 - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{6 - 1 - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- řešení systému $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
  1. řešení $U^T\mathbf{z} = \mathbf{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  2. řešení $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$