ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

METODA PŮLENÍ INTERVALU

- v každém kroku konstrukce intervalu $\langle a_0, b_0\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n, b_n\rangle$,
- střed intervalu:

$$s_i = \frac{1}{2}\left(a_i + b_i\right), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad chyby:

$$d_i = \frac{1}{2}\left(b_i - a_i\right), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad počtu kroků:

$$\frac{b_i - a_i}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

- $f(a_i) \cdot f(s_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = s_i$
  $f(s_i) \cdot f(b_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = s_i$, $b_{i+1} = b_i$
- STOP podmínky: $d_i < \varepsilon$

METODA PROSTÉ ITERACE

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- ekvivalence úlohy: hledání kořene rovnice $f(x) = 0$ odpovídá hledání pevného bodu funkce $g(x)$
- podmínky:

1. $g(x) \in C(I)$
2. zobrazení do sebe: $g : I \to I$
3. $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

- konstrukce: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$
- geometrický význam: řešit rovnici $x = g(x)$ znamená hledat průsečík přímky $y = x$ s křivkou $y = g(x)$
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

NEWTONOVA METODA

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- konstrukce:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \; f'(x_i) \neq 0, \; i = 0, 1, \ldots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x) \in C^2(I)$
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na I
3. volba počáteční aproximace: x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

METODA REGULA FALSI

- konstrukce:

$$x_i = a_{i-1} - f(a_{i-1}) \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{f(b_{i-1} - f(a_{i-1}))}, \; i = 1, 2, \ldots$$

- geometrická interpretace: bod x_i je průsečík sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $[a_{i-1}, f(a_{i-1})]$, $[b_{i-1}, f(b_{i-1})]$ s osou x
- STOP podmínky: $|f(x_i)| < \varepsilon$

Příklad. Najděte všechny kořeny rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou bisekce,

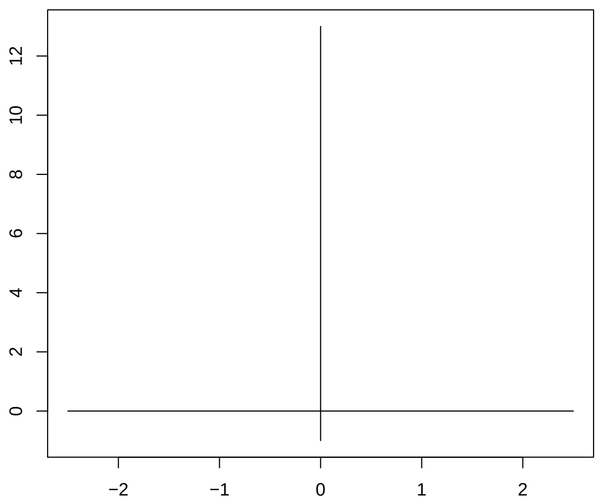
b) metodou prosté iterace,

c) Newtonovou metodou,

d) metodou regula falsi.

Řešení.
• hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \\ f(-1) = \end{array}\right\} \quad f(-2)\cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \\ f(2) = \end{array}\right\} \quad f(0)\cdot f(2) < 0$$

a) metoda bisekce:

$$s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$$
$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$$

STOP kritérium: $d_i < \varepsilon$

• odhad záporného kořene:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0							
1							
2							
3	-1.25	-1.125	-1.1875	0.0625	0.2403	-0.0448	0.0914
4	-1.1875	-1.125	-1.1563	0.0313	0.0914	-0.0448	0.0217
5	-1.1563	-1.125	-1.1406	0.0156	0.0217	-0.0448	-0.0119
6	-1.1563	-1.1406	-1.1484	0.0078 < 0.01	0.0217	-0.0119	0.0048

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1484 \pm 0.0078$$

• odhad kladného kořene:

odhad počtu kroků:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} &< \varepsilon \\
\frac{2}{2^{i+1}} &< 0.01 \\
\frac{2}{0.01} &< 2^{i+1} \\
200 &< 2^{i+1} \\
\log_2 200 &< i + 1 \\
i &> 7.6439 - 1 \\
i &= 7
\end{aligned}
$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	0	2	1	1	-1	0.1353	-0.6321
1	1	2	1.5	0.5	-0.6321	0.1353	-0.2769
2	1.5	2	1.75	0.25	-0.2769	0.1353	-0.0762
3	1.75	2	1.875	0.125	-0.0762	0.1353	0.0284
4	1.75	1.875	1.8125	0.0625	-0.0762	0.0284	-0.0243
5	1.8125	1.875	1.8438	0.0313	-0.0243	0.0284	0.0020
6	1.8125	1.8438	1.8281	0.0156	-0.0243	0.0020	-0.0112
7	1.8281	1.8438	1.8359	0.0078 < 0.01	-0.0112	0.0020	-0.0046

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8359 \pm 0.0078$$

b) metoda prosté iterace:

$$x_{i+1} = g(x_i),\ i = 0, 1, \ldots$$
$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

• odhad záporného kořene:
volba iterační funkce:

1. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
   $g(x) = x =$, podmínky:

2. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$

$g(x) = x =$, podmínky:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0			
1			
2	-1.2197	-1.1693	0.0504
3	-1.1693	-1.1535	0.0158
4	-1.1535	-1.1485	0.0050 < 0.01

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_2 = -1.1485 \pm 0.0050$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-1	-1.0986	0.0986
1	-1.0986	-1.1310	0.0323
2	-1.1310	-1.1413	0.0104
3	-1.1413	-1.1446	0.0033 < 0.01

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_2 = -1.1446 \pm 0.0033$$

• odhad kladného kořene:
volba iterační funkce:
$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
$g(x) = x = 2 - \mathrm{e}^{-x}$, podmínky:

1. $g(x) \in C\langle 0, 2\rangle$
2. $g(0) = 1 \in C\langle 0, 2\rangle$
   $g(2) = 1.8647 \in C\langle 0, 2\rangle$
   extrém? $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \ldots$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
3. $|g'(0)| = 1 \longrightarrow$ posunout levý krajní bod intervalu do 0.1 $\longrightarrow$ nový interval $\langle 0.1, 2\rangle$ + dodatečné ověření podmínek:
   $g(0.1) = 1.0952 \in \langle 0.1, 2\rangle$, $|g'(0.1)| = 0.9048 < 1$
   $|g'(2)| = 0.1353 < 1$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	0.1	1.0952	0.9952
1	1.0952	1.6655	0.5704
2	1.6655	1.8109	0.1454
3	1.8109	1.8365	0.0256
4	1.8365	1.8406	0.0041 < 0.01

odhad kladného kořene:
$$\hat{x}_2 = 1.8406 \pm 0.0041$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	2	1.8647	0.1353
1	1.8647	1.8451	0.0196
2	1.8451	1.8420	0.0031 < 0.01

odhad kladného kořene:
$$\hat{x}_2 = 1.8420 \pm 0.0031$$

c) Newtonova metoda:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, \ldots$$

$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

• odhad záporného kořene:
Fourierovy podmínky:

i	x_i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0			
1			0.2622
2	-1.2073	-1.1488	0.0585
3	-1.1488	-1.1462	0.0026 < 0.01

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_2 = -1.1462 \pm 0.0026$$

• odhad kladného kořene:
Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + e^{-x} - 2 \in C\langle 0, 2\rangle$
   $f'(x) = 1 - e^{-x} \in C\langle 0, 2\rangle$
   $f''(x) = e^{-x} \in C\langle 0, 2\rangle$
2. $f'(0) = 0$
   $f'(2) = 0.8647$
   extrém? $f''(x) = e^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
   $f''(0) = 1$
   $f''(2) = 0.1353$
   extrém? $f'''(x) = -e^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(0) = -1$
   $f(2) = 0.1353 \longrightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \longrightarrow x_0 = 2$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	2	1.8435	0.1565
1	1.8435	1.8414	$0.0021 < 0.01$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8414 \pm 0.0021$$

d) metoda regula falsi:

$$x_i = a_{i-1} - f(a_{i-1}) \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}, \text{ i=1,2,\dots}$$
$$\text{STOP kritérium: } |f(x_i)| < \varepsilon$$

• odhad záporného kořene:

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
0	-2	-1	–	3.3891	-0.2817	–
1	-2	-1	-1.0767	3.3891	-0.2817	-0.1416
2	-2	-1.0767	-1.1138	3.3891	-0.1416	-0.0679
3	-2	-1.1138	-1.1312	3.3891	-0.0679	-0.0318
4	-2	-1.1312	-1.1393	3.3891	-0.0318	-0.0148
5	-2	-1.1393	-1.1430	3.3891	-0.0148	$\lvert -0.0068\rvert < 0.01$

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_2 = -1.1430 \pm 0.0068$$

• odhad kladného kořene:

i	a_i	b_i	x_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_i)$
0	0	2	–	-1	0.1353	–
1	0	2	1.7616	-1	0.1353	-0.0666
2	1.7616	2	1.8403	-0.0666	0.1353	$\lvert -0.001\rvert < \varepsilon$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8403 \pm 0.001$$