

DISKRÉTNÍ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- využití: prokládání dat křivkami, řešení přeurených systémů lineárních rovnic
- nahrazení požadavku $F(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ slabším požadavkem

$$(F(x_0) - f(x_0))^2 + (F(x_1) - f(x_1))^2 + \dots (F(x_n) - f(x_n))^2 \rightarrow \min$$

- obecná formulace úlohy: Pro dané vektory $\varphi \in \mathbb{R}^k$ a $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)} \in \mathbb{R}^k$, $n < k$ najděte koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n$ tak, že pro vektor $\varphi^* = c_1\varphi^{(1)} + \dots + c_n\varphi^{(n)}$ je norma $\|\varphi - \varphi^*\|_2$ minimální.
- konstrukce: neznámé koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n$ dostáváme jako řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. *normálních rovnic*:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(n)} \rangle \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi, \varphi^{(n)} \rangle \end{pmatrix} \quad (1)$$

- *Pozn. 1.* Při návrhu aproximace bychom měli aproximační funkci vybírat tak, aby vektory $\varphi^{(i)}$ byly lineárně nezávislé, v opačném případě by měla soustava (1) nekonečně mnoho řešení.
- *Pozn. 2.* Za předpokladu, že jsou vektory $\varphi^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ lineárně nezávislé, matice soustavy (1) je symetrická a pozitivně definitní $\rightarrow$ soustava (1) lze efektivně řešit např. Choleského metodou.

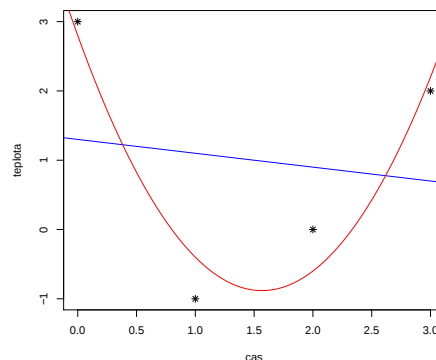
Příklad 1. Pro zadané hodnoty najděte vztah popisující závislost teploty na čase zjištěnou měření zaznamenaným v tabulce. Aproximujte

- lineárním,
- kvadratickým polynomem.

Vypočítejte normu vektoru chyb výsledné aproximace v daných uzlech.

i	0	1	2	3
čas	0	1	2	3
teplota	3	-1	0	2

Řešení.



Příklad 2. Metodou nejmenších čtverců řešte přeuročenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 - x_2 &= 1 \\x_1 + 2x_2 &= -1.\end{aligned}$$

Řešení.

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

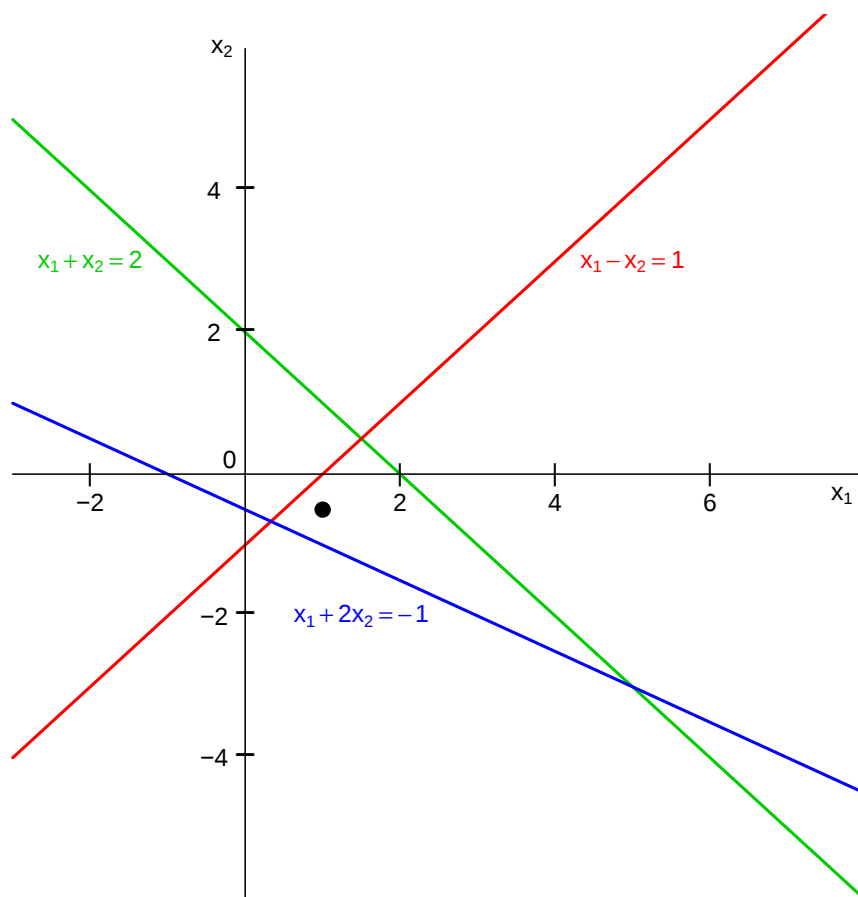
- skalární součiny:

$$\begin{aligned}\langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle &= 3 \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 6 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle &= -1\end{aligned}$$

- systém normálních rovnic:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- odhad $\varphi^* = (1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)^T$
- chyba aproximace: $\|\varphi - \varphi^*\|_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 1.8708$



Příklad 3. Funkci $f(x) = x^2$ aproximujte v uzlech $x_i = -2 + i$, $i = 1, 2, 3, 4$ lineární kombinací funkcí 1 , e^x , e^{-x} . Vypočítejte normu vektoru chyb výsledné aproximace v daných uzlech.

Řešení.

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	4

Dané funkce: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = e^{-x}$

x_i	-1	0	1	2
$f_1(x_i)$	1	1	1	1
$f_2(x_i)$	0.367879	1	2.718282	7.389056
$f_3(x_i)$	2.718282	1	0.367879	0.135335

$$\Rightarrow \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.367879 \\ 1 \\ 2.718282 \\ 7.389056 \end{pmatrix}, \varphi^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.718282 \\ 1 \\ 0.367879 \\ 0.135335 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- skalární součiny:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle &= 4 \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 63.122541 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 8.542708 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(3)} \rangle &= 11.475217 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(3)} \rangle &= 4.221496 \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)} \rangle &= 3.999996 \\ \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle &= 6 \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle &= 32.642385 \\ \langle \varphi, \varphi^{(3)} \rangle &= 3.627501 \end{aligned}$$

- systém normálních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11.475217 & 4.221496 & 6 \\ 11.475217 & 63.122541 & 3.999996 & 32.642385 \\ 4.221496 & 3.999996 & 8.542708 & 3.627501 \end{array} \right)$$

- řešení systému lineárních rovnic:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1.341346 \\ 0.713225 \\ 0.753519 \end{pmatrix}$$

- aproximace funkce:

$$\varphi^* = c_1 \varphi^{(1)} + c_2 \varphi^{(2)} + c_3 \varphi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.969312 \\ 0.125398 \\ 0.874604 \\ 4.030691 \end{pmatrix}$$

- chyba aproximace: $\|\varphi - \varphi^*\|_2 = 0.182572$

