INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- aproximace zadaných hodnot nebo hledané funkce f funkcí $F(x)$ (polynomem)
- F musí být k f "co nejblíže"
- značení: $\mathcal{P}^{(n)}$ ... množina všech polynomů stupně $\leq n$

ÚLOHA LAGRANGEOVY INTERPOLACE

- značení:
  $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ... vzájemně různé body (uzly)
  $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ... dané hodnoty
  $F(x)$ ... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

- interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

Řešení lze popsat rekurzivním způsobem pomocí poměrných diferencí prvního, druhého, ... n-tého řádu – výpočet pomocí tabulky poměrných diferencí si ukážeme na cvičení.

ÚLOHA HERMITEOVY INTERPOLACE

- značení:
  $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ... vzájemně různé body (uzly)
  $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ... dané hodnoty
  $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ ... dané hodnoty první derivace
  $F(x)$ ... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$\begin{aligned} F(x_i) &= y_i \\ F'(x_i) &= y'_i,\ i = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$H(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic (stejnou jako výše), přičemž každý uzel se v dané soustavě objevuje dvakrát a poměrné diference tvaru $\left|\frac{0}{0}\right|$ jsou nahrazeny zadanými derivacemi.

Příklad 1. Pro zadané hodnoty sestrojte

a) interpolační polynom v Newtonově tvaru,

b) Hermiteův interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16
y_i'	-1	-4	92

Řešení.

Příklad 2. Hodnotu $\sqrt[3]{1.05}$ aproximujte hodnotou

a) Newtonova

b) Hermiteova

interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v uzlech $x_0 = 1$ a $x_1 = 1.2$. V obou případech určete absolutní chybu aproximace. Zaokrouhlujte na 6 desetinných míst.

a) Úloha Lagrangeovy interpolace, interpolační polynom v Newtonově tvaru:

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$
0	1	1	$\frac{1.062659-1}{1.2-1} = 0.3133295$
1	1.2	1.062659	

Newtonův interpolační polynom:

$$
\begin{aligned}
N(x) &= 1 + 0.3133295 \cdot (x-1) \\
N(1.05) &= 1 + 0.3133295 \cdot (1.05-1) \doteq 1.015665 \\
\sqrt[3]{1.05} &\doteq 1.016396
\end{aligned}
$$

odhad absolutní chyby: $\left|N(1.05) - \sqrt[3]{1.05}\right| = 7.31 \cdot 10^{-4}$

b) Úloha Hermiteovy interpolace, interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	1	1			
			$f'(1) = 0.333333$		
1	1	1		$\frac{0.313295-0.333333}{1.2-1} = -0.10019$	
			$\frac{1-1.062659}{1-1.2} = 0.313295$		$\frac{-0.09056+0.10019}{1.2-1} = 0.04815$
2	1.2	1.062659		$\frac{0.295183-0.313295}{1.2-1} = -0.09056$	
			$f'(1.2) = 0.295183$		
3	1.2	1.062659			

Hermiteův interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 1 + 0.333333(x-1) - 0.10019(x-1)^2 + 0.04815(x-1)^2(x-1.2) \\
H(1.05) &= 1 + 0.333333(1.05-1) - 0.10019(1.05-1)^2 + 0.04815(1.05-1)^2(1.05-1.2) = 1.016398 \\
\sqrt[3]{1.05} &\doteq 1.016396
\end{aligned}
$$

odhad absolutní chyby: $\left|H(1.05) - \sqrt[3]{1.05}\right| = 1.99 \cdot 10^{-6}$

Řešený příklad z praxe.
Nákladní trajekt spojující pevninu s ostrovem má maximální kapacitu 1 000 osobních vozů, ovšem nakládka vozů blížící se maximální kapacitě je časově velmi náročná. K dispozici máme tabulku s počty aut naloženými v daném čase

čas [hod]	0.5	0.7	0.9	1.1
y	452	585	689	768
y'	743	590	453	340

Odhadněte, kolik vozů bylo naloženo za 1 hodinu, použitím

a) Newtonova interpolačního polynomu,

b) Hermiteova interpolačního polynomu.

Řešení.

a) $\boxed{\text{Newtonův interpolační polynom}}$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0.5	452			
			665		
1	0.7	585		$-\frac{725}{2}$	
			520		$\frac{250}{3}$
2	0.9	689		$-\frac{625}{2}$	
			395		
3	1.1	768			

Newtonův interpolační polynom:

$$
\begin{aligned}
N(x) &= 452 + 665 \cdot (x - 0.5) - \frac{725}{2} \cdot (x - 0.5)\,(x - 0.7) + \frac{250}{3} \cdot (x - 0.5)\,(x - 0.7)\,(x - 0.9) = \ldots \\
&= \frac{250}{3}\,x^3 - \frac{1075}{2}\,x^2 + \frac{7315}{6}\,x - \frac{269}{8} \\
N(1) &= \frac{5851}{8} \doteq 731.3750
\end{aligned}
$$

b) $\boxed{\text{Hermiteův interpolační polynom}}$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i							
0	0.5	452							
			743						
				-390					
1	0.5	452							
			665		75				
						$-\frac{125}{4}$			
2	0.7	585		-375					
			590		$\frac{125}{2}$		$\frac{625}{4}$		
						$\frac{125}{4}$		$-\frac{3125}{36}$	
3	0.7	585		-350					
			520		75		$\frac{625}{6}$		$-\frac{36169}{25}$
						$\frac{375}{4}$		$-\frac{34375}{36}$	
4	0.9	689		-335					
			453		$\frac{225}{2}$		$-\frac{1875}{4}$		
						$-\frac{375}{4}$			
5	0.9	689		-290					
			395		75				
				-275					
6	1.1	768							
			340						
7	1.1	768							

Hermiteův interpolační polynom:

$$H(x) = \ldots = -\frac{36169}{25}\,x^7 + \frac{379051}{50}\,x^6 - \frac{116768}{7}\,x^5 + \frac{39985}{2}\,x^4 - \frac{70177}{5}\,x^3 + \frac{80314}{15}\,x^2 - \frac{32171}{245}\,x + \frac{14227}{145}$$

$$H(1) = \frac{140407}{192} \doteq 731.2865$$

Poznámka k výsledkům.
Pokud víme, že lze počet naložených vozů v čase t vyjádřit vztahem

$$f(t) = 1\,000 \cdot \frac{t}{t + \mathrm{e}^{-t}},$$

porovnejte odhadnuté počty naložených aut za 1 hodinu se skutečnou hodnotou:

t [hod]	1
N(t)	731.3750
H(t)	731.2865
f(t)	731.0586

Pozn. Zajímají nás odhady počtů naložených aut $\Rightarrow$ po zaokrouhlení se odhady neliší od hodnoty spočítané ze zadané funkce. Počet naložených aut během 1 hodiny je tedy 731.