

NEWTONOVA METODA PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMU DVOU NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- je dána soustava dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

- vektorový zápis soustavy: $F(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\vec{0} = (0, 0)^T \in \mathbb{R}^2$
- ekvivalence úloh: $F(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = G(\vec{x})$, kde $G(\vec{x})$ je iterační matice tvaru

$$G(\vec{x}) = \vec{x} - J_F^{-1}(\vec{x})F(\vec{x}), \text{ kde } J_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

se nazývá Jacobiova matice funkce F .

- iterační vztah:

$$\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} - J_F^{-1}(\vec{x}^{(i)})F(\vec{x}^{(i)}), i = 0, 1, 2, \dots$$

- postup pro výpočet:
 1. označme $\vec{d}^{(i)} = \vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}$
 2. $J_F(\vec{x}^{(i)})\vec{d}^{(i)} = -F(\vec{x}^{(i)}) \rightarrow$ výpočet $\vec{d}^{(i)}$
 3. dosazení do iteračního vztahu: $\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} + \vec{d}^{(i)}$

Příklad 1. Newtonovou metodou řešte systém nelineárních rovnic

$$2x - e^y + 2 = 0$$

$$e^x + y - 1 = 0.$$

Počítejte s počáteční aproximací $\vec{x}^{(0)} = (0, 0)^T$ a přesností $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

Souhrnné výsledky (výsledky jsou uvedeny pro použití různých typů norem):

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	0.0000	-0.3333	0.3333	0.3333	-0.3333	0.3333	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$
1	-0.3333	0.3333	-0.0025	-0.0481	0.0481	-0.3358	0.2852	
2	-0.3358	0.2852	0.0006	-0.0004	0.0006 < 0.001	-0.3352	0.2848	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	0.0000	-0.3333	0.3333	0.6666	-0.3333	0.3333	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$
1	-0.3333	0.3333	-0.0025	-0.0481	0.0506	-0.3358	0.2852	
2	-0.3358	0.2852	0.0006	-0.0004	0.0010 ≤ 0.001	-0.3352	0.2848	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	0.0000	-0.3333	0.3333	0.4714	-0.3333	0.3333	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$
1	-0.3333	0.3333	-0.0025	-0.0481	0.0482	-0.3358	0.2852	
2	-0.3358	0.2852	0.0006	-0.0004	0.0007 < 0.001	-0.3352	0.2848	

Příklad 2. Newtonovou metodou řešte systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y + \frac{1}{2} &= 0 \\x^2 + 4y^2 - 4 &= 0.\end{aligned}$$

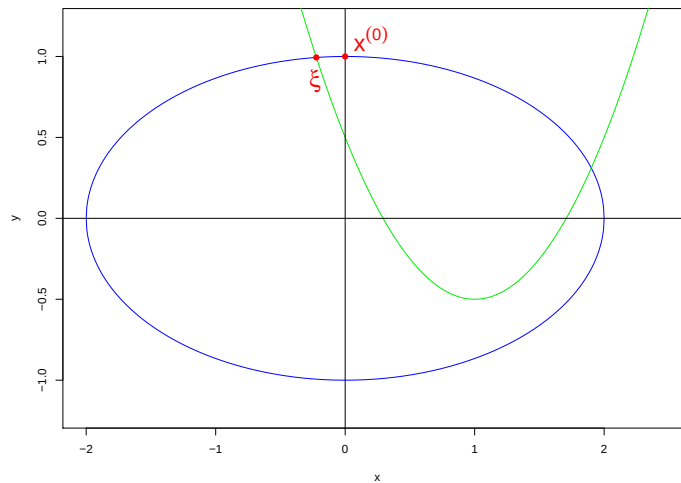
Počítejte s počáteční aproximací $\vec{x}^{(0)} = (0, 1)^T$ a přesností $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

- Úprava na rovnici systému na středový tvar:

$$x^2 - 2x - y + \frac{1}{2} = (x - 1)^2 - y - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y = (x - 1)^2 - \frac{1}{2} \dots \text{rovnice paraboly}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \dots \text{elipsa: } S = [0, 0], a = 2, b = 1$$



- Jacobiova matice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} &= 2x - 2 \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} &= -1 \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} &= 8y\end{aligned} \Rightarrow J_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x - 2 & -1 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$

- Výpočet $\vec{x}^{(1)}$:

$$J_F(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, F(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme systém $J_F(\vec{x}^{(0)})\vec{d}^{(0)} = -F(\vec{x}^{(0)})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet aproximace $\vec{x}^{(1)}$:

$$\vec{d}^{(0)} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \rightarrow \vec{x}^{(1)} = \vec{d}^{(0)} + \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Výpočet $\vec{x}^{(2)}$:

$$J_F(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}, F(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Řešíme systém $J_F(\vec{x}^{(1)})\vec{d}^{(1)} = -F(\vec{x}^{(1)})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} & 8 & -\frac{1}{16} \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.0274 \\ 0 & 1 & -0.0061 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0274 \\ -0.0061 \end{pmatrix}$$

Výpočet aproximace $\vec{x}^{(2)}$:

$$\vec{d}^{(1)} = \vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)} \rightarrow \vec{x}^{(2)} = \vec{d}^{(1)} + \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0274 \\ -0.0061 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2226 \\ 0.9939 \end{pmatrix}$$

- Výpočet $\vec{x}^{(3)}$:

$$J_F(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2.4452 & -1 \\ -0.4452 & 7.9512 \end{pmatrix}, F(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0.0009 \\ 0.0009 \end{pmatrix}$$

Řešíme systém $J_F(\vec{x}^{(2)})\vec{d}^{(2)} = -F(\vec{x}^{(2)})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2.4452 & -1 & 0.0009 \\ -0.4452 & 7.9512 & 0.0009 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.0004 \\ 0 & 1 & -0.0001 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0004 \\ -0.0001 \end{pmatrix}$$

Výpočet aproximace $\vec{x}^{(3)}$:

$$\vec{d}^{(2)} = \vec{x}^{(3)} - \vec{x}^{(2)} \rightarrow \vec{x}^{(3)} = \vec{d}^{(2)} + \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0004 \\ -0.0001 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2226 \\ 0.9939 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$$

- Souhrnné výsledky (výsledky jsou uvedeny pro použití různých typů norem):

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	1.0000	-0.2500	0.0000	0.2500	-0.2500	1.0000	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$
1	-0.2500	1.0000	0.0274	-0.0061	0.0274	-0.2226	0.9939	
2	-0.2226	0.9939	0.0004	-0.0001	0.0004 < 0.001	-0.2222	0.9938	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	1.0000	-0.2500	0.0000	0.2500	-0.2500	1.0000	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$
1	-0.2500	1.0000	0.0274	-0.0061	0.0335	-0.2226	0.9939	
2	-0.2226	0.9939	0.0004	-0.0001	0.0005 < 0.001	-0.2222	0.9938	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0.0000	1.0000	-0.2500	0.0000	0.2500	-0.2500	1.0000	$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$
1	-0.2500	1.0000	0.0274	-0.0061	0.0281	-0.2226	0.9939	
2	-0.2226	0.9939	0.0004	-0.0001	0.0004 < 0.001	-0.2222	0.9938	

Řešený příklad z praxe.

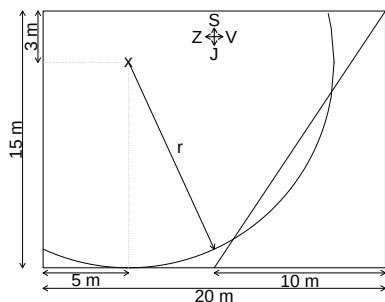
Babička má obdélníkovou zahradu o délce 20 m a šířce 15 m. V jihovýchodním cípu zahrady se nachází zeleninová zahrádka ve tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Kratší strany zahrádky jsou tvořeny celou východní stranou zahrady a polovinou jižní strany. Ve vzdálenosti 3 m od severní strany a 5 m od západní strany se nachází strom, u kterého je na 12 m dlouhém laně přivázána hladová koza.

Pomůžete babičce zjistit, zda může koza spást část úrody na zahrádce?

Počítejte s přesností $\varepsilon = 0.01$.

**Řešení.**

Nákres zahrady:



- středový tvar rovnice kružnice:

$$(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 12^2$$

- rovnice přímky:

$$y = \frac{3}{2}x - 15$$

Řešíme systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 12)^2 - 12^2 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x + y + 15 &= 0 \end{aligned}$$

- Jacobiova matice:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = 2(x - 5)$$

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 2(y - 12)$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 1$$

$$\Rightarrow J_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2(x - 5) & 2(y - 12) \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- iterační proces (výsledky pro různé typy norem)

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0	0	8.3696	-2.4457	8.3696	8.3696	-2.4457
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	3.1162	10.4470	0.6705
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	0.9111	11.0544	1.5816
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.0939	11.1170	1.6755
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	0.0010 < 0.01	11.1177	1.6765
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0	0	8.3696	-2.4457	10.8153	8.3696	-2.4457
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	5.1936	10.4470	0.6705
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	1.5185	11.0544	1.5816
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.1565	11.1170	1.6755
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	0.0017 < 0.01	11.1177	1.6765

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	0	0	8.3696	-2.4457	8.7196	8.3696	-2.4457	
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	3.7452	10.4470	0.6705	$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	1.0950	11.0544	1.5816	
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.1129	11.1170	1.6755	
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	0.0012 < 0.01	11.1177	1.6765	

- iterační proces pro odhad druhého řešení (výsledky pro různé typy norem):

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	20	15	-2.3077	-3.4615	3.4615	17.6923	11.5385	
1	17.6923	11.5385	-0.7211	-1.0818	1.0818	16.9712	10.4567	$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 16.8823 \\ 10.3235 \end{pmatrix}$
2	16.9712	10.4567	-0.0876	-0.1312	0.1312	16.8836	10.3255	
3	16.8836	10.3255	-0.0013	-0.0020	0.0020 < 0.01	16.8823	10.3235	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	20	15	-2.3077	-3.4615	5.7692	17.6923	11.5385	
1	17.6923	11.5385	-0.7211	-1.0818	1.8029	16.9712	10.4567	$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 16.8823 \\ 10.3235 \end{pmatrix}$
2	16.9712	10.4567	-0.0876	-0.1312	0.2188	16.8836	10.3255	
3	16.8836	10.3255	-0.0013	-0.0020	0.0033 < 0.01	16.8823	10.3235	
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\ \vec{d}^{(i)}\ _2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$	
0	20	15	-2.3077	-3.4615	4.1602	17.6923	11.5385	
1	17.6923	11.5385	-0.7211	-1.0818	1.3001	16.9712	10.4567	$\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 16.8823 \\ 10.3235 \end{pmatrix}$
2	16.9712	10.4567	-0.0876	-0.1312	0.1578	16.8836	10.3255	
3	16.8836	10.3255	-0.0013	-0.0020	0.0024 < 0.01	16.8823	10.3235	