## ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC SE SYMETRICKÝMI POZITIVNĚ DEFINITNÍMI MATICEMI

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

se symetrickou pozitivně definitní maticí soustavy $A$.
Pozitivně definitní matice: všechny hlavní minory (determinanty všech čtvercových submatic) jsou kladné.
*Tvrzení.* Je-li $A$ symetrická pozitivně definitní matice, pak existuje horní trojúhelníková matice $U$ s kladnými prvky na diagonále taková, že

$$A = U^T U.$$

Toto vyjádření se nazývá CHOLESKÉHO ROZKLAD matice $A$.

Postupným porovnáním prvků na obou stranách soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

dostáváme vyjádření prvků matice $U = (u_{ij})$ v obecném tvaru:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \quad j = 2, \dots, n, \\ u_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 2, \dots, n, \\ u_{ij} &= \frac{1}{u_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}), \qquad i < j, \\ u_{ij} &= 0, \qquad i > j. \end{aligned}$$

Řešení systému lineárních rovnic pak nastává ve dvou krocích:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ U^T \underbrace{U\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{b} \quad \longrightarrow \quad 1.\ U^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \longrightarrow \boldsymbol{z} \\ & \qquad\qquad\quad 2.\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \longrightarrow \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

***Příklad 1.*** Choleského metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 &= 20. \end{aligned}$$

***Příklad 2.*** Choleského metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= \phantom{-}2 \\ x_1 + 2x_2 + \phantom{4}x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= \phantom{-}3. \end{aligned}$$

***Řešení.***
Protože matice soustavy $A$ není symetrická, stačí zaměnit pořadí některých rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \phantom{4}x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= \phantom{-}2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= \phantom{-}3 \end{aligned}$$

- ověření podmínek:
  - $A$ symetrická
  - $|A_1| = 1 > 0$, $|A_2| = 4 > 0$, $|A_3| = 16 > 0$
- konstrukce matice $U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &1 = u_{11}^2 \Rightarrow u_{11} = 1 \\ &2 = u_{11} \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = 2 \\ &1 = u_{11} \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = 1 \\ &8 = u_{12}^2 + u_{22}^2 \Rightarrow u_{22} = \sqrt{8 - u_{12}^2} = \sqrt{4} = 2 \\ &4 = u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{1}{u_{22}} (4 - u_{12} \cdot u_{13}) = \frac{1}{2} (4 - 2) = 1 \\ &6 = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \Rightarrow u_{33} = \sqrt{6 - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{6 - 1 - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- řešení systému $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:
  1. řešení $U^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$:

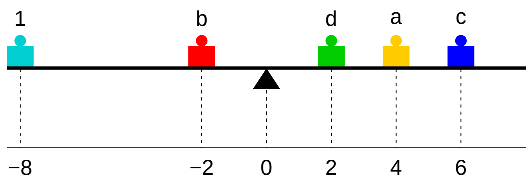
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  2. řešení $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$:

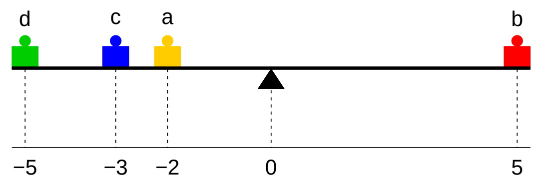
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

***Řešený příklad z praxe.***
Máme pět závaží, jedno z nich má hmotnost 1 kg. Chceme zjistit hmotnosti zbylých závaží. Experiment s tyčí zanedbatelné váhy vedl k těmto rovnovážným stavům:

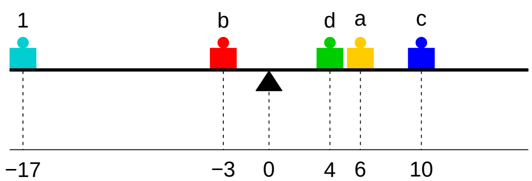
- 1. rovnovážný stav:



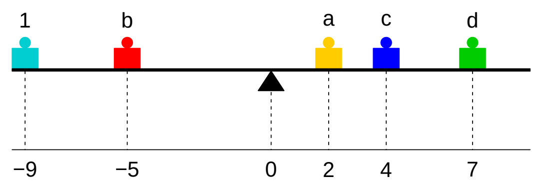

- 2. rovnovážný stav:




- 3. rovnovážný stav:




- 4. rovnovážný stav:




Řeště Choleského metodou.

***Řešení.***
K jednotlivým rovnovážným stavům sestavíme rovnice:

- 1. rovnovážný stav: $6c + 4a + 2d - 2b - 8 \cdot 1 = 0$
- 2. rovnovážný stav: $5b - 2a - 3c - 5d = 0$
- 3. rovnovážný stav: $10c + 6a + 4d - 3b - 17 \cdot 1 = 0$
- 4. rovnovážný stav: $7d + 4c + 2a - 5b - 9 \cdot 1 = 0$

Dostáváme systém lineárních rovnic:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -5 \\ 6 & -3 & 10 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

Ověření podmínek:

- $A$ symetrická
- $|A_1| = 4 > 0$, $|A_2| = 16 > 0$, $|A_3| = 16 > 0$, $|A_4| = 16 > 0 \longrightarrow A$ je pozitivně definitní

Konstrukce matice $U$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -5 \\ 6 & -3 & 10 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = u_{11}^2 \to u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \to \boxed{u_{11} = 2}$$
$$a_{12} = u_{11} \cdot u_{12} \to u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \to \boxed{u_{12} = -1}$$
$$a_{13} = u_{11} \cdot u_{13} \to u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3 \to \boxed{u_{13} = 3}$$
$$a_{14} = u_{11} \cdot u_{14} \to u_{14} = \frac{a_{14}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \to \boxed{u_{14} = 1}$$
$$a_{22} = u_{12}^2 + u_{22}^2 \to u_{22}^2 = a_{22} - u_{12}^2 = 5 - 1 \to \boxed{u_{22} = 2}$$
$$a_{23} = u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \to u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} \cdot u_{13}}{u_{22}} = \frac{-3 - (-1) \cdot 3}{2} = 0 \to \boxed{u_{23} = 0}$$
$$a_{24} = u_{12} \cdot u_{14} + u_{22} \cdot u_{24} \to u_{24} = \frac{a_{24} - u_{12} \cdot u_{14}}{u_{22}} = \frac{-5 - (-1) \cdot 1}{2} = -2 \to \boxed{u_{24} = -2}$$
$$a_{33} = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \to u_{33}^2 = a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2 = 10 - 9 - 0 = 1 \to u_{33} = 1 \to \boxed{u_{33} = 1}$$
$$a_{34} = u_{13} \cdot u_{14} + u_{23} \cdot u_{24} + u_{33} \cdot u_{34} \to u_{34} = \frac{a_{34} - u_{13} \cdot u_{14} - u_{23} \cdot u_{24}}{u_{33}} = \frac{4 - 3 \cdot 1 - 0}{1} = 1 \to \boxed{u_{34} = 1}$$
$$a_{44} = u_{14}^2 + u_{24}^2 + u_{34}^2 + u_{44}^2 \to u_{44}^2 = a_{44} - u_{14}^2 - u_{24}^2 - u_{34}^2 \to u_{44} = \sqrt{7 - 1 - 4 - 1} = 1 \to \boxed{u_{44} = 1}$$

$$\Longrightarrow U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení systémů:

- řešení systému $U^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- řešení systému $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$