

NORMA VEKTORU A MATICE

- nezáporné číslo charakterizující velikost prvků matice (vektoru)

Značení.

$a_{ij} \dots$ prvek na i -tém řádku a j -tém sloupci matice A

$x_i \dots i$ -tý prvek vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- normy vektorů:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- normy matic:

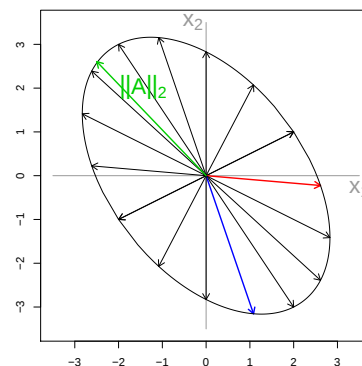
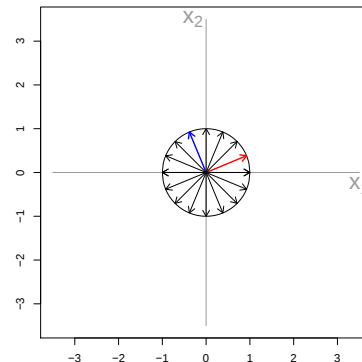
$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \dots \text{maximum sloupcových součtů}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad \dots \text{maximum řádkových součtů}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots \text{Frobeniova norma}$$

- podmínka souhlasnosti:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

**Příklad 1.**

Spočítejte normy matice A a vektoru $\mathbf{x}$ a ověřte podmínku souhlasnosti: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2.

Pro danou matici A a vektor $\mathbf{x}$ spočítejte normy a ověřte podmínku souhlasnosti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -24 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$$

- $\|\mathbf{x}\|_1 = 12$
 $\|A\mathbf{x}\|_1 = 60$
 $\|A\|_1 = \max\{11, 7, 15, 18\} = 18$
 podmínka souhlasnosti: $60 \leq 18 \cdot 12$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = 5$
 $\|A\mathbf{x}\|_\infty = 24$
 $\|A\|_\infty = \max\{8, 13, 16, 14\} = 16$
 podmínka souhlasnosti: $24 \leq 16 \cdot 5$
- $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{4 + 25 + 1 + 16} = \sqrt{46}$
 $\|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{289 + 576 + 16 + 225} = \sqrt{1106}$
 $\|A\|_F = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4 + 1 + 25 + 25 + 36 + 4 + 64 + 64 + 25 + 1} = \sqrt{275}$
 podmínka souhlasnosti: $\sqrt{1106} \leq \sqrt{275} \cdot \sqrt{46}$