ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

NEWTONOVA METODA
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- konstrukce:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ f'(x_i) \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots$$

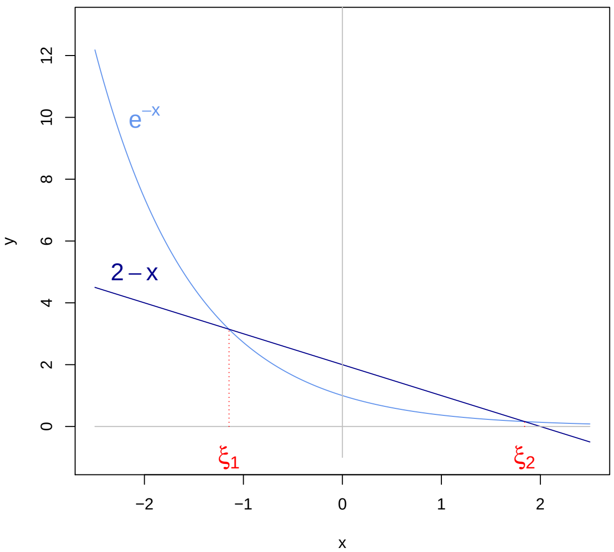
- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x) \in C^2(I)$
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na I
3. volba počáteční aproximace: x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

Příklad 1. Pomocí Newtonovy metody najděte všechny kořeny rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01.
Řešení.
• hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$\begin{aligned} x + \mathrm{e}^{-x} - 2 &= 0 \\ \mathrm{e}^{-x} &= 2 - x \end{aligned}$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= 3.3891 \\ f(-1) &= -0.2817 \end{aligned}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(2) &= 0.1353 \end{aligned}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

$\boxed{\text{Newtonova metoda:}}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, \ldots$$

$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

- odhad záporného kořene:

Fourierovy podmínky:

iterační proces:

i	x_i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0			
1			0.2622
2	-1.2073	-1.1488	0.0585
3	-1.1488	-1.1462	$0.0026 < 0.01$

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1462 \pm 0.0026$$

- odhad kladného kořene

Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \in C(\langle 0, 2\rangle)$
   $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \in C(\langle 0, 2\rangle)$
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \in C(\langle 0, 2\rangle)$
2. $f'(0) = 0$
   $f'(2) = 0.8647$
   extrém? $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
   $f''(0) = 1$
   $f''(2) = 0.1353$
   extrém? $f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(0) = -1$
   $f(2) = 0.1353 \longrightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \longrightarrow x_0 = 2$

iterační proces:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	2	1.8435	0.1565
1	1.8435	1.8414	$0.0021 < 0.01$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8414 \pm 0.0021$$

Řešený příklad z praxe.

Zdroj: [1]

Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost v je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8$ m·s^{-2} a $c = 13$ kg·s^{-1}. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95$ kg. Newtonovou metodou odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti 35 m·s^{-1}.

Řešení. Vycházíme z rovnice

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

a řešíme $f(t) = 0$, kde

$$f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v.$$

Volíme interval $I = \langle 3, 6\rangle$.
Ověření Fourierových podmínek:

1. $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v \in C\left(\langle 3, 6\rangle\right)$
   $f'(t) = \frac{gm}{c}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) \cdot \frac{-c}{m} = \ldots = g\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C\left(\langle 3, 6\rangle\right)$
   $f''(t) = -\frac{cg}{m}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C\left(\langle 3, 6\rangle\right)$
2. $f'(3) = 6.5004$
   $f'(6) = 4.3117$
   extrém? exponenciála monotonní funkce $\Rightarrow$ nemá extrém na I
   $f''(3) = -0.8895$
   $f''(6) = -0.5900$
   extrém? exponenciála monotonní funkce $\Rightarrow$ nemá extrém na I
3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(3) = -10.8872$
   $f(6) = 5.1069 \longrightarrow f(3) \cdot f''(3) > 0 \longrightarrow x_0 = 3$

iterační proces:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	3.0000	4.6749	1.6749
1	4.6749	4.8988	0.2239
2	4.8988	4.9023	0.0035
3	4.9023	4.9023	$0.00000084 < 0.001$

odhad kořene:

$$\hat{t} = 4.9023 \pm 0.0000$$

[1] http://www.shapesticker.eu/Samolepka-Parasutista-d49.htm?tab=description