ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

METODA PŮLENÍ INTERVALU (METODA BISEKCE)

- v každém kroku konstrukce intervalu $\langle a_0, b_0\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n, b_n\rangle$,
- střed intervalu:

$$s_i = \frac{1}{2}\left(a_i + b_i\right), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad chyby:

$$d_i = \frac{1}{2}\left(b_i - a_i\right), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

- $f(a_i) \cdot f(s_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = a_i,\, b_{i+1} = s_i$
  $f(s_i) \cdot f(b_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = s_i,\, b_{i+1} = b_i$
- STOP podmínky: $d_i < \varepsilon$

METODA PROSTÉ ITERACE

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- ekvivalence úlohy: hledání kořene rovnice $f(x) = 0$ odpovídá hledání pevného bodu funkce $g(x)$
- podmínky:

1. $g(x) \in C(I)$
2. zobrazení do sebe: $g : I \to I$
3. $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

- konstrukce: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$
- geometrický význam: řešit rovnici $x = g(x)$ znamená hledat průsečík přímky $y = x$ s křivkou $y = g(x)$
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

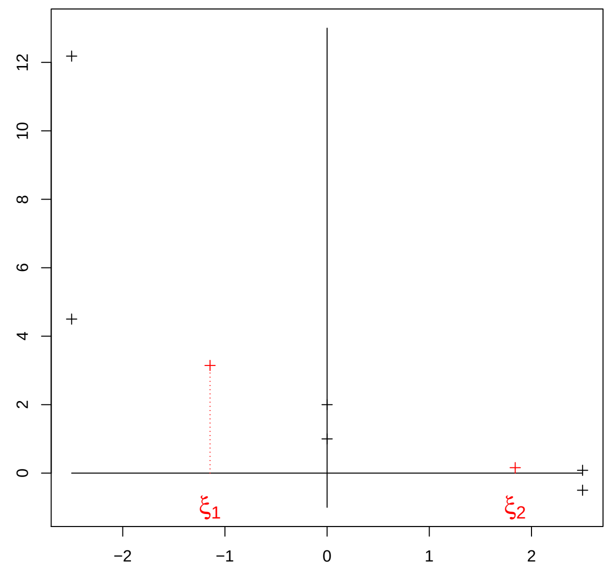
Příklad 1. Najděte všechny kořeny rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou bisekce,

b) metodou prosté iterace,

Řešení.
• hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \\ f(-1) = \end{array}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \\ f(2) = \end{array}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) $\boxed{\textbf{metoda bisekce:}}$

$$s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$$
$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$$
STOP kritérium: $d_i < \varepsilon$

- odhad záporného kořene:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0							
1							
2							
3							
4	-1.1875	-1.125	-1.1563	0.0313	0.0914	-0.0448	0.0217
5	-1.1563	-1.125	-1.1406	0.0156	0.0217	-0.0448	-0.0119
6	-1.1563	-1.1406	-1.1484	$0.0078 < 0.01$	0.0217	-0.0119	0.0048

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1484 \pm 0.0078$$

- odhad kladného kořene:

odhad počtu kroků:

$$\begin{aligned}
\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} &< \varepsilon \\
\frac{2}{2^{i+1}} &< 0.01 \\
\frac{2}{0.01} &< 2^{i+1} \\
200 &< 2^{i+1} \\
\log_2 200 &< i + 1 \\
i &> 7.6439 - 1 \\
i &= 7
\end{aligned}$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	0	2	1	1	-1	0.1353	-0.6321
1	1	2	1.5	0.5	-0.6321	0.1353	-0.2769
2	1.5	2	1.75	0.25	-0.2769	0.1353	-0.0762
3	1.75	2	1.875	0.125	-0.0762	0.1353	0.0284
4	1.75	1.875	1.8125	0.0625	-0.0762	0.0284	-0.0243
5	1.8125	1.875	1.8438	0.0313	-0.0243	0.0284	0.0020
6	1.8125	1.8438	1.8281	0.0156	-0.0243	0.0020	-0.0112
7	1.8281	1.8438	1.8359	$0.0078 < 0.01$	-0.0112	0.0020	-0.0046

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8359 \pm 0.0078$$

b) $\boxed{\textbf{metoda prosté iterace:}}$

$$x_{i+1} = g(x_i),\ i = 0, 1, \ldots$$
$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

- odhad záporného kořene:

volba iterační funkce:

1. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
   $g(x) = x =$, podmínky:

2. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$

   $g(x) = x =$, podmínky:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0			
1			
2			
3	-1.1693	-1.1535	0.0158
4	-1.1535	-1.1485	$0.0050 < 0.01$

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1485 \pm 0.0050$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-1	-1.0986	0.0986
1	-1.0986	-1.1310	0.0323
2	-1.1310	-1.1413	0.0104
3	-1.1413	-1.1446	$0.0033 < 0.01$

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1446 \pm 0.0033$$

- odhad kladného kořene:

volba iterační funkce:
$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
$g(x) = x = 2 - \mathrm{e}^{-x}$, podmínky:

1. $g(x) \in C\langle 0, 2\rangle$
2. $g(0) = 1 \in \langle 0, 2\rangle$
   $g(2) = 1.8647 \in \langle 0, 2\rangle$
   extrém? $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \ldots$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
3. $|g'(0)| = 1 \longrightarrow$ posunout levý krajní bod intervalu do 0.1 $\longrightarrow$ nový interval $\langle 0.1, 2\rangle$ + dodatečné ověření podmínek:
   $g(0.1) = 1.0952 \in \langle 0.1, 2\rangle$, $|g'(0.1)| = 0.9048 < 1$
   $|g'(2)| = 0.1353 < 1$
   extrém? $g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \ldots$ nemá extrém na $\langle 0.1, 2\rangle$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	0.1	1.0952	0.9952
1	1.0952	1.6655	0.5704
2	1.6655	1.8109	0.1454
3	1.8109	1.8365	0.0256
4	1.8365	1.8406	$0.0041 < 0.01$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8406 \pm 0.0041$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	2	1.8647	0.1353
1	1.8647	1.8451	0.0196
2	1.8451	1.8420	$0.0031 < 0.01$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8420 \pm 0.0031$$

Řešený příklad z praxe.

Zdroj: [1]

Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost v je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $c = 13\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95$ kg. Odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti $35\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

a) analyticky,

b) metodou bisekce (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$),

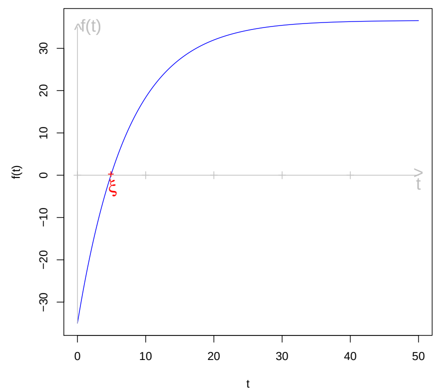
c) metodou prosté iterace (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$).

Řešení.

a) $\boxed{\textbf{analytické řešení:}}$

Řešíme nelineární rovnici $f(t) = 0$, kde $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v$:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)\\
\frac{cv}{gm} &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\\
\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} &= 1 - \frac{cv}{gm}\\
-\frac{c}{m}t &= \ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right)\\
t &= -\frac{m}{c}\ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right)\\
t &\doteq 4.9023\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$



b) $\boxed{\textbf{metoda bisekce:}}$ např. $I = \langle 3, 6\rangle$

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	3.0000	6.0000	4.5000	1.5000	-10.8872	5.1069	-2.0723
1	4.5000	6.0000	5.2500	0.7500	-2.0723	5.1069	1.7014
2	4.5000	5.2500	4.8750	0.3750	-2.0723	1.7014	-0.1371
3	4.8750	5.2500	5.0625	0.1875	-0.1371	1.7014	0.7939
4	4.8750	5.0625	4.9688	0.0938	-0.1371	0.7939	0.3314
5	4.8750	4.9688	4.9219	0.0469	-0.1371	0.3314	0.0979
6	4.8750	4.9219	4.8984	0.0234	-0.1371	0.0979	-0.0194
7	4.8984	4.9219	4.9102	0.0117	-0.0194	0.0979	0.0393
8	4.8984	4.9102	4.9043	0.0059	-0.0194	0.0393	0.0100
9	4.8984	4.9043	4.9014	0.0029	-0.0194	0.0100	-0.0047
10	4.9014	4.9043	4.9028	0.0015	-0.0047	0.0100	0.0027
11	4.9014	4.9028	4.9021	$0.0007 < \varepsilon$	-0.0047	0.0027	-0.0010

odhad kořene:

$$\hat{t} = 4.9021 \pm 0.0007$$

c) **metoda prosté iterace**:

Volba iterační funkce: $g(t) = \dfrac{gm}{gm - cv} t e^{-\frac{c}{m}t}$, $I = \langle 3, 6\rangle$

Ověření podmínek:

1. $g(t) \in C\left(\langle 3, 6\rangle\right)$
2. $g(3) \doteq 3.8920 \in \langle 3, 6\rangle$
   $g(6) \doteq 5.1632 \in \langle 3, 6\rangle$
   Má funkce $g(t)$ na intervalu $\langle 3, 6\rangle$ extrém?
   $$\begin{aligned} g'(t) = \frac{gm}{gm - cv} e^{-\frac{c}{m}t} \left(1 - \frac{c}{m}t\right) &= 0 \\ \Rightarrow e^{-\frac{c}{m}t} = 0 \vee 1 - \frac{c}{m}t &= 0 \\ \text{může nastat pouze 2. situace: } 1 - \frac{c}{m}t = 0 \Rightarrow t = \frac{m}{c} &\doteq 7.3077 \notin \langle 3, 6\rangle \end{aligned}$$
   $\Rightarrow$ jedná se o zobrazení do sebe
3. $g'(3) \doteq 0.7647 < 1$
   $g'(6) \doteq 0.1540 < 1$
   Má funkce $g'(t)$ na intervalu $\langle 3, 6\rangle$ extrém?
   $$\begin{aligned} g''(t) = \frac{gm}{gm - cv} \left(e^{-\frac{c}{m}t} \cdot \frac{-c}{m} \left(1 - \frac{c}{m}t\right) + e^{-\frac{c}{m}t} \cdot \frac{-c}{m}\right) &= 0 \\ \frac{gm}{gm - cv} \cdot \frac{-c}{m} \left(2 - \frac{c}{m}t\right) e^{-\frac{c}{m}t} &= 0 \\ 2 - \frac{c}{m}t = 0 \vee e^{-\frac{c}{m}t} &= 0 \\ \text{může nastat pouze 1. situace: } 2 - \frac{c}{m}t = 0 \Rightarrow t = 2\frac{m}{c} &\doteq 14.6154 \notin \langle 3, 6\rangle \end{aligned}$$
   $\Rightarrow$ platí $|g'(t)| < 1 \quad \forall t \in \langle 3, 6\rangle$

Výpočet:

i	t_i	$t_{i+1} = g(t_i)$	$\lvert t_{i+1} - t_i\rvert$
0	3.0000	3.8920	0.8920
1	3.8920	4.4691	0.5770
2	4.4691	4.7420	0.2730
3	4.7420	4.8472	0.1052
4	4.8472	4.8839	0.0367
5	4.8839	4.8962	0.0123
6	4.8962	4.9003	0.0041
7	4.9003	4.9016	0.0013
8	4.9016	4.9021	0.0004 < 0.01

odhad kořene:

$$\hat{t} = 4.9021 \pm 0.0004$$