

Příklad. Najděte souřadnice těžiště T hmotného oblouku daného čtvrtkružnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v 1. kvadrantu, je-li hustota v každém bodě úměrná součinu souřadnic příslušného bodu.

Potřebné vztahy:

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \sigma(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \\ S_x &= \int_a^b \sigma(x) \cdot f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \\ S_y &= \int_a^b \sigma(x) \cdot x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 &\rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ (f'(x))^2 &= \frac{x^2}{r^2 - x^2} \\ \sigma(x) &= k \cdot x \cdot y = k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = k \cdot r \cdot \frac{1}{2} [x^2]_0^r = \frac{1}{2} r^3 k \\ S_x &= \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r k \cdot x \cdot (r^2 - x^2) \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = k \cdot r \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &\quad \left| \begin{array}{ll} r^2 - x^2 = z^2 & x = 0 \Rightarrow z = r \\ dx = -\frac{z}{x} dz & x = r \Rightarrow z = 0 \end{array} \right| = k \cdot r \int_0^r z^2 dz = k \cdot r \cdot \frac{1}{3} [z^3]_0^r = \frac{1}{3} r^4 k \\ S_y &= \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r k \cdot x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2 + x^2} dx = k \cdot r \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^r = \frac{1}{3} r^4 k \\ \left. \begin{aligned} x_T &= \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{1}{3} r^4 k}{\frac{1}{2} r^3 k} = \frac{2}{3} r \\ y_T &= \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{1}{3} r^4 k}{\frac{1}{2} r^3 k} = \frac{2}{3} r \end{aligned} \right\} \quad T = \left[\frac{2}{3} r, \frac{2}{3} r \right] \end{aligned}$$