

• **Integrály typu**

$$\int R \left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

kde R je racionální funkce $m+1$ proměnných a $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

- substitute:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1, q_2, \dots, q_m$; dostáváme

$$x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}.$$

• **Integrály typu**

$$\int R \left(x, \sqrt{px^2 + qx + r} \right),$$

kde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ je racionální funkce dvou proměnných u, v a $p, q, r \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$.

Polynom $px^2 + qx + r$ má:

- dvojnásobný reálný kořen $\rightarrow$ integrace racionální funkce;
- dva různé reálné kořeny $\rightarrow$ integrál typu

$$\int R \left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx;$$

- komplexní kořeny $\rightarrow$ jednoduchými úpravami a lineární substitucí převedeme na tvar

$$\int R \left(x, \sqrt{1+x^2} \right) dx,$$

tento integrál můžeme počítat využitím

(a) **Eulerovy substitute**

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

$\rightarrow$ integrál z racionální funkce (substituce někdy ve tvaru $\sqrt{1+x^2} = t - x$),

(b) **goniometrické substitute**

$$x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$\rightarrow$ integrál z funkce $\int R(\cos t, \sin t)$,

(c) **hyperbolické substitute**

$$\begin{aligned} x &= \sinh t, & dx &= \cosh t \, dt, & \text{nebo} \\ x &= \cosh t, & dx &= \sinh t \, dt \end{aligned}$$

$\rightarrow$ integrál z funkce $R(\cosh t, \sinh t)$ + použití Druhé substituční metody.

Integrály typu

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

kde $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $a \neq 0$, lze řešit převedením na součet integrálů

$$K \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx + L \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx.$$