

Najděte trojici nezáporných čísel x, y, z tak, aby platilo $x + y + z = 12$ a výraz $x^2 + y^2 + z^2$ byl

- a) minimální,
- b) maximální.

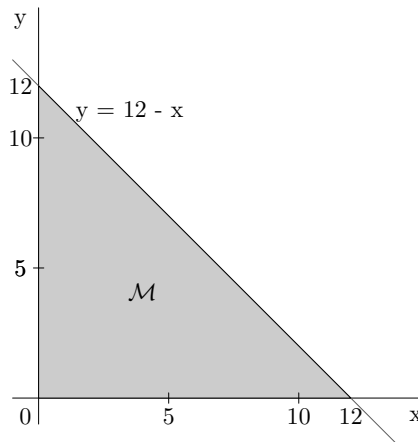
Řešení.

Vymezení oblasti:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \Leftrightarrow 12 - x - y \geq 0, \text{ tj. } y \leq 12 - x \end{aligned}$$

Formulace minimalizační/maximalizační úlohy:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \longrightarrow \min/\max \\ z = 12 - x - y &\Rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 + (12 - x - y)^2 \longrightarrow \min/\max \end{aligned}$$



I. Stacionární body uvnitř oblasti $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + 2(12 - x - y)(-1) = 0 \\ f'_y(x, y) &= 2y + 2(12 - x - y)(-1) = 0 \\ 2x + y - 12 &= 0 \\ x + 2y - 12 &= 0 \\ \Rightarrow S_1 &= [4, 4] \end{aligned}$$

II. Stacionární body na hranici.

(i) $x = 0, y \in \langle 0, 12 \rangle$:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= f(y) = y^2 + (12 - y)^2 \\ f'_y(y) &= 2y + 2(12 - y) \cdot (-1) = 4y - 24 = 0 \longrightarrow y = 6 \longrightarrow S_2 = [0, 6] \end{aligned}$$

(ii) $y = 0, x \in \langle 0, 12 \rangle$:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= f(x) = x^2 + (12 - x)^2 \\ f'_x(x) &= 4x - 24 = 0 \longrightarrow x = 6 \longrightarrow S_3 = [6, 0] \end{aligned}$$

(iii) $y = 12 - x, x \in \langle 0, 12 \rangle$:

$$\begin{aligned} f(x, 12 - x) &= x^2 + (12 - x)^2 \\ f'_x(x) &= 4x - 24 = 0 \longrightarrow x = 6, y = 6 \longrightarrow S_4 = [6, 6] \end{aligned}$$

III. Společné body jednotlivých částí hranice.

$$S_5 = [0, 0], S_6 = [0, 12], S_7 = [12, 0]$$

	$f(S_i), i = 1, \dots, 7$	$[x, y, z]$	
$S_1 = [4, 4]$	48	$[4, 4, 4]$	... globální minimum
$S_2 = [0, 6]$	72		
$S_3 = [6, 0]$	72		
$S_4 = [6, 6]$	72		
$S_5 = [0, 0]$	144	$[0, 0, 12]$	} globální maxima
$S_6 = [0, 12]$	144	$[0, 12, 0]$	
$S_7 = [12, 0]$	144	$[12, 0, 0]$	