Příklad. (Těžiště nehomogenního hmotného oblouku.)
Najděte souřadnice těžiště T hmotného oblouku daného čtvrtkružnicí $x^2+y^2=r^2$ v 1. kvadrantu, je-li hustota v každém bodě úměrná součinu souřadnic příslušného bodu.

Potřebné vztahy:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_a^b \sigma(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x,\\
S_x &= \int_a^b \sigma(x)\cdot f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x,\\
S_y &= \int_a^b \sigma(x)\cdot x\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Řešení.

$$
x^2+y^2=r^2 \to y=\sqrt{r^2-x^2} \to f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}
$$

$$
(f'(x))^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}
$$

$$
\sigma(x)=k\cdot x\cdot y=k\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}
$$

$$
m=\int_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=k\cdot r\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^r=\frac{1}{2}r^3k
$$

$$
S_x=\int_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^r k\cdot x\cdot\left(r^2-x^2\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=k\cdot r\int_0^r x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=
$$

$$
\left|\begin{array}{ll} r^2-x^2=z^2 & x=0\Rightarrow z=r\\ \mathrm{d}x=-\frac{z}{x}\,\mathrm{d}z & x=r\Rightarrow z=0\end{array}\right|=k\cdot r\int_0^r z^2\,\mathrm{d}z=k\cdot r\cdot\frac{1}{3}\left[z^3\right]_0^r=\frac{1}{3}r^4k
$$

$$
S_y=\int_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot x\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^r k\cdot x^2\cdot\sqrt{r^2-x^2+x^2}\,\mathrm{d}x=k\cdot r\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^r=\frac{1}{3}r^4k
$$

$$
\left.\begin{array}{l} x_T=\frac{S_y}{m}=\frac{\frac{1}{3}r^4k}{\frac{1}{2}r^3k}=\frac{2}{3}r\\ y_T=\frac{s_x}{m}=\frac{\frac{1}{3}r^4k}{\frac{1}{2}r^3k}=\frac{2}{3}r\end{array}\right\}\quad T=\left[\frac{2}{3}r,\frac{2}{3}r\right]
$$