Integrace racionální lomené funkce

- rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky:

TYP I: $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^l}\,\mathrm{d}x, l \in \mathbb{N}, a \neq 0, A \neq 0$ - vede na integrály typu $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ nebo substituci $ax+b=t$

TYP II: $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k}\,\mathrm{d}x, k \in \mathbb{N}, p \neq 0, q^2-4pr<0, B^2+C^2 \neq 0$:

- $k=1$ - integrand vhodné upravit na tvar

$$K\underbrace{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x}_{=\ln|f(x)|}+L\underbrace{\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}_{\text{integrály vedoucí na arctg}}$$

- $k>1, k \in \mathbb{N}$ - úprava integrandu na tvar

$$K\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x+L\underbrace{\int \frac{1}{(f(x))^k}\,\mathrm{d}x}$$

upravíme na tvar $\frac{1}{(t^2+a^2)^k}$ a primitivní funkci určíme užitím rekurentního vztahu

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2ka^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+(2k-1)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}t\right)$$

Příklad 1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$

Řešení:

• rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kořenových činitelů:

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

• rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{3\,(x-1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

• úprava výrazu $\frac{x-1}{x^2+x+1}$ (integrace racionální funkce, typ II):

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=\dots \qquad \dots=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$

• úprava výrazu $\dfrac{1}{x^2+x+1}$:

◦ úprava na čtverec:

◦ další úpravy:

⇒ dostáváme:

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\right]}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Celkem dostáváme integrál:

$$\int\frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\dots$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

Příklad 2. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

Řešení:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2)\,2}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\,(3\cdot 2x+2)}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{3\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{2}{\left(x^2+2\right)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2}I_1 + I_2$$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left|x^2+2=t\right| = \int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{x^2+2}+c$
- $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{x}{x^2+2}+(2\cdot 1-1)\int\frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\int\frac{1}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}\,\mathrm{d}x\right)$
  $\displaystyle= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$

Celkem tedy

$$\int \frac{3x+1}{\left(x^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c = \frac{1}{4}\cdot\frac{x-6}{x^2+2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$