

Spočítejte $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$.

Řešení:

- rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kořenových činitelů:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

- rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$

$$\frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

- úprava výrazu $\frac{x-1}{x^2+x+1}$ (integrace racionální funkce, typ II):

$$\frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

- úprava výrazu $\frac{1}{x^2+x+1}$:

- úprava na čtverec:

- další úpravy:

$\Rightarrow$ dostáváme:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 \right]} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

Celkem dostáváme integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3 - 1} dx &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c$$