ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

METODA TEČEN = NEWTONOVA METODA
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ f'(x_i) \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x), f'(x), f''(x)$ jsou spojité na intervalu I
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na I
3. volba počáteční aproximace: x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

METODA SEČEN
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$, $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

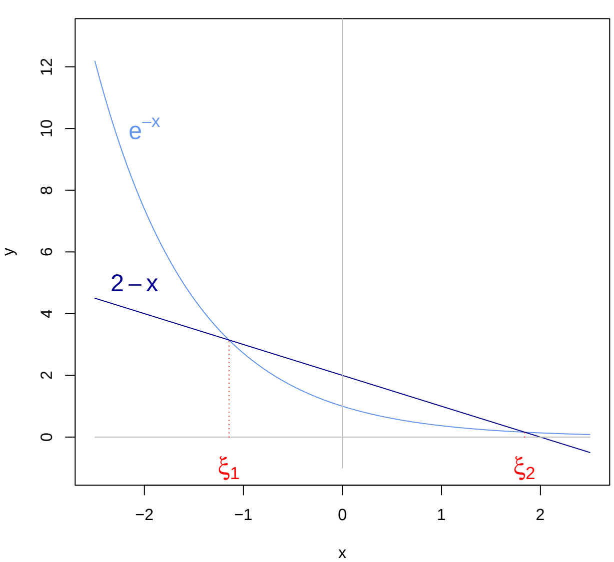
Příklad. Najděte všechny kořeny rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou tečen,

b) metodou sečen.

Řešení.
- hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$\begin{aligned} x + \mathrm{e}^{-x} - 2 &= 0 \\ \mathrm{e}^{-x} &= 2 - x \end{aligned}$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= 3.3891 \\ f(-1) &= -0.2817 \end{aligned}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(2) &= 0.1353 \end{aligned}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) metoda tečen:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, \ldots$$

STOP kritérium: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

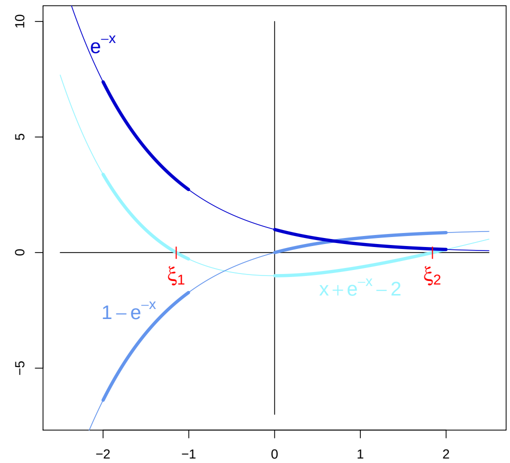
• odhad záporného kořene:
Fourierovy podmínky:

i	x_i	x_{i+1}	$\vert x_{i+1} - x_i \vert$
0			
1			
2			
3	-1.1488	-1.1462	$0.0026 < 0.01$

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 = -1.1462 \pm 0.0026$$

• odhad kladného kořene:



Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$ spojitá na I
   $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ spojitá na I
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$ spojitá na I
2. $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2\rangle$
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2\rangle$
3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(0) = -1$
   $f(2) = 0.1353 \longrightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \longrightarrow x_0 = 2$

i	x_i	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	2	1.8435	0.1565
1	1.8435	1.8414	$0.0021 < 0.01$

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8414 \pm 0.0021$$

b) metoda sečen:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots$$
$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

• odhad záporného kořene:

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$	
1					1. krok pomocí metody tečen
2					
3	-1.2842	-1.1738	-1.1488	0.025	
4	-1.1738	-1.1488	-1.1462	$0.0026 < 0.01$	$\Rightarrow$ -1.1462 $\pm$ 0.0026
1	-1	-1.1640	-1.1442	0.0198	1. krok pomocí metody tečen
2	-1.164	-1.1442	-1.1462	$0.002 < 0.01$	$\Rightarrow$ -1.1462 $\pm$ 0.002
1	-2	-1	-1.0767	0.0767	1. krok zadáním intervalu
2	-1	-1.0767	-1.1543	0.0776	
3	-1.0767	-1.1543	-1.1458	$0.0085 < 0.01$	$\Rightarrow$ -1.1458 $\pm$ 0.0085

• odhad kladného kořene:

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$	
1	2	1.8435	1.8414	$0.0021 < 0.01$	$\Rightarrow$ 1.8414 $\pm$ 0.0021 (1. krok pomocí metody tečen)
1	0		–	–	metoda tečen nelze použít pro počáteční aproximaci 0
1	0.01	100.5058	1.0199	99.4859	metoda tečen s počáteční aproximací 0.01
2	100.5058	1.0199	1.6416	0.6217	
3	1.0199	1.6416	1.8668	0.2252	
4	1.6416	1.8668	1.8409	0.0259	
5	1.8668	1.8409	1.8414	$0.0005 < 0.01$	$\Rightarrow$ 1.8414 $\pm$ 0.0005
1	0	2	1.7616	0.2384	
2	2	1.7616	1.8403	0.0787	
3	1.7616	1.8403	1.8414	$0.0011 < 0.01$	$\Rightarrow$ 1.8414 $\pm$ 0.0011

[verze: 31. *X.* 2016]