

NUMERICKÉ DERIVOVÁNÍ

- hledáme přibližnou hodnotu derivace funkce f
- *použití*:
 - derivovaná funkce je zadána pouze tabulkou hodnot
 - výpočet přesné hodnoty derivace je příliš pracný
- *úloha*: pro daný bod x , danou funkci f a daný krok diskretizace $h > 0$ aproximujeme hodnoty derivací $f'(x)$, $f''(x)$ pomocí hodnot $f(x-h)$, $f(x)$, $f(x+h)$

Diferenční aproximace vychází z Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ v bodě x_0 (za předpokladu existence derivací):

- (poměrná) difference směrem dopředu:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- zpětná difference:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- centrální difference:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- druhá centrální difference:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Příklad. Je zadána funkce $f(x) = 2^x \sin x$. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace v bodech 1.01, 1.05, 1.09, 1.13 a chybu, které se při odhadech derivací dopustíte.

Řešení.

i	0	1	2	3
x_i	1.01	1.05	1.09	1.13
$f(x_i)$	1.7054	1.7960	1.8874	1.9794
$f'(x_i)$	2.2650	2.2750	2.2925	2.3000
$f''(x_i)$	—	0.5000	0.3750	—
$f'^*(x_i)$	2.2532	2.2751	2.2928	2.3058
$f''^*(x_i)$	0.5988	0.4951	0.3842	0.2661
$ f'(x_i) - f'^*(x_i) $	0.0118	0.0001	0.0003	0.0058
$ f''(x_i) - f''^*(x_i) $	—	0.0049	0.0092	—

Příklad. Je zadána funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace

a) v bodech $-0.95, 0.05, 1.05$,

b) v bodech $0.04, 0.05, 0.06$

a chybu, které se při odhadech derivací dopustíte.

Řešení.

Tabulka funkčních hodnot a odhadů derivací:

i	0	1	2
x_i	-0.95	0.05	1.05
$f(x_i)$	20	0.9524	0.4878
$f'(x_i)$	-19.0480	-9.7561	-0.4646
$f''(x_i)$	—	18.5830	—

i	0	1	2
x_i	0.04	0.05	0.06
$f(x_i)$	0.9615	0.9524	0.9434
$f'(x_i)$	-0.9100	-0.9050	-0.9000
$f''(x_i)$	—	1	—

Výpočet přesných hodnot derivací:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'^*(x_0) = -400$$

$$f'^*(x_1) = -0.9070$$

$$f'^*(x_2) = -0.238$$

$$f''^*(x_0) = 1.7277$$

$$f'^*(x_0) = -0.9246$$

$$f'^*(x_1) = -0.9070$$

$$f'^*(x_2) = -0.8900$$

$$f''^*(x_0) = 1.7277$$

$$|f'(x_0) - f'^*(x_0)| = 380.9500$$

$$|f'(x_1) - f'^*(x_1)| = 8.8491$$

$$|f'(x_2) - f'^*(x_2)| = 0.2266$$

$$|f''(x_1) - f''^*(x_1)| = 16.8550$$

$$|f'(x_0) - f'^*(x_0)| = 0.0146$$

$$|f'(x_1) - f'^*(x_1)| = 0.0020$$

$$|f'(x_2) - f'^*(x_2)| = 0.0100$$

$$|f''(x_1) - f''^*(x_1)| = 0.7277$$