INTERPOLAČNÍ POLYNOM:

- aproximace zadaných hodnot funkcí $F(x)$ (polynomem)
- hodnoty zadaných bodů a funkce $F(x)$ se shodují v daných bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$
- značení:
  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ... vzájemně různé body (uzly)
  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ... dané hodnoty
  $F(x)$ ... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n$$

  $\mathcal{P}^{(n)}$ ... množina všech polynomů stupně $\leq n$

LAGRANGEŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM
- konstrukce:
Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x).$$

Fundamentální polynomy:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)},\ i = 0, 1, \dots, n.$$

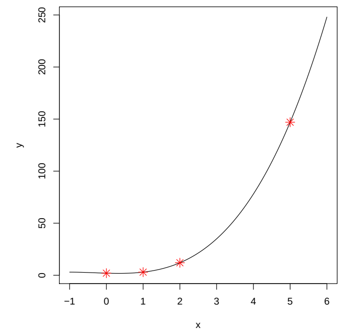
Platí: $L_i(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \Rightarrow F(x) = L(x).$

INTERPOLAČNÍ POLYNOM V NEWTONOVĚ TVARU
- konstrukce:
Interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\
a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= y_n.
\end{aligned}$$



Příklad. Pro zadané hodnoty sestrojte

a) Lagrangeův interpolační polynom,

b) Newtonův interpolační polynom.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147

Řešení.

a) Lagrangeův interpolační polynom:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-5)} = \qquad = -\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

$$L_1(x) = \qquad = \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x)$$

$$L_2(x) = \qquad = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x)$$

$$L_3(x) = \qquad = \frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

Langrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x) = \ldots$$

$$\cdots = x^3 + x^2 - x + 2$$

b) Newtonův interpolační polynom:

Tabulka poměrných diferencí

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	2			
1	1	3			
2	2	12			
3	5	147			

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) =$$

$$\cdots = x^3 + x^2 - x + 2$$