

## DISKRÉTNÍ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- využití: prokládání dat křivkami, řešení přeurčených systémů lineárních rovnic
- obecná formulace úlohy: Pro dané vektory  $\varphi \in \mathbb{R}^k$  a  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n < k$  najděte koeficienty  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tak, že pro vektor  $\varphi^* = c_1\varphi^{(1)} + \dots + c_n\varphi^{(n)}$  je norma  $\|\varphi - \varphi^*\|_2$  minimální.
- konstrukce: neznámé koeficienty  $c_1, c_2, \dots, c_n$  dostáváme jako řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. *normálních rovnic*:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(n)} \rangle \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(1)} \rangle & \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(2)} \rangle & \dots & \langle \varphi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi, \varphi^{(n)} \rangle \end{pmatrix} \quad (1)$$

**Příklad.** Metodou nejmenších čtverců řešte přeurčenou soustavu lineárních rovnic

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 \quad \quad + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad = 1.$$

**Řešení.**

**Příklad.** Metodou nejmenších čtverců řešte přeuerčenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 - x_2 &= 1 \\x_1 + 2x_2 &= -1.\end{aligned}$$

**Řešení.**

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- skalární součiny:

$$\begin{aligned}\langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle &= 3 \\ \langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 6 \\ \langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(1)} \rangle &= 2 \\ \langle \varphi, \varphi^{(2)} \rangle &= -1\end{aligned}$$

- systém normálních rovnic:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- odhad  $\varphi^* = (1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)^T$
- chyba aproximace:  $\|\varphi - \varphi^*\|_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 1.8708$