JACOBIOVA A GAUSSOVA-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

s regulární maticí soustavy A.
Princip iteračních metod: převést soustavu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na systém $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ s iterační maticí T.
Iterační proces:

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = T\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{d},$$

vhodnou volbou iterační matice T dostáváme konkrétní iterační metodu.
Rozklad matice soustavy A:

$$A = D + L + U,$$

kde D značí diagonální matici, L dolní trojúhelníkovou matici bez diagonály a U horní trojúhelníkovou matici bez diagonály:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

• JACOBIOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ D\boldsymbol{x} &= -(L + U)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$D\boldsymbol{x}^{(i+1)} = -(L + U)\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{b}.$$

• GAUSSOVA-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L)\boldsymbol{x} &= -U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$(D + L)\boldsymbol{x}^{(i+1)} = -U\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{b}.$$

Konvergence metod:

- A ryze řádkově diagonálně dominantní:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad i = 1, \ldots, n$$

A - ryze řádkově diagonálně dominantní $\Rightarrow$ konvergence pro libovolnou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Příklad. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \ \ + x_3 \ &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \ &= 4 \\ -x_1 - x_2 \ \ - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x} = (0,0,0)^T$ a $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

- Jacobiova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	1.0000
2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.5555
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.3612
4	0.3302	0.7107	-0.1636	0.2338
5	0.4843	0.8758	-0.0136	0.1651
6	0.3793	0.7613	-0.12	0.1145
7	0.4529	0.8403	-0.0469	0.079
8	0.4022	0.7853	-0.0977	0.055
9	0.4375	0.8233	-0.0625	0.038
10	0.4131	0.7969	-0.0869	0.0264
11	0.43	0.8152	-0.07	0.0183
12	0.4183	0.8025	-0.0817	0.0127
13	0.4264	0.8113	-0.0736	0.0088
14	0.4208	0.8052	-0.0792	0.0061
15	0.4247	0.8094	-0.0753	0.0042
16	0.422	0.8065	-0.078	0.0029
17	0.4238	0.8085	-0.0762	0.002
18	0.4226	0.8072	-0.0774	0.0013
19	0.4234	0.8081	-0.0766	0.0009

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.6667
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.1852
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0473
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0094
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0015
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002

Příklad. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 \;-8x_3 &= -13 \\ 10x_1 + 4x_2 \;-5x_3 &= 3 \\ x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -5 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\boldsymbol{x} = (0,0,0)^T$ a $\varepsilon = 0.1$.

Řešení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \end{pmatrix} \ldots \text{nejedná se o ryze diagonálně dominantní matici}$$

$\Rightarrow$ budeme uvažovat matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ a vektor pravé strany $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$

- Jacobiova metoda

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0.0000	0.0000	0.0000	–
1	0.3000	-0.4167	1.6250	1.6250
2	1.2792	0.9125	1.4021	1.3292
3	0.6361	0.6451	2.3552	0.9531
4	1.2196	1.4930	2.1077	0.8479
5	0.7566	1.2381	2.7106	0.6029
6	1.1601	1.7791	2.4934	0.5410
7	0.8351	1.5645	2.8820	0.3886
8	1.1152	1.9154	2.7072	0.3509
9	0.8874	1.7464	2.9615	0.2543
10	1.0822	1.9773	2.8274	0.2309
11	0.9228	1.8493	2.9961	0.1687
12	1.0583	2.0032	2.8962	0.1539
13	0.9468	1.9086	3.0093	0.1131
14	1.0412	2.0122	2.9362	0.1036
15	0.9632	1.9434	3.0128	0.0780

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(i)} - \boldsymbol{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0.0000	0.0000	0.0000	–
1	0.3000	-0.4417	1.3865	1.3865
2	1.1699	0.6413	2.1720	1.0830
3	1.1295	1.2992	2.5782	0.6579
4	1.0694	1.6427	2.7854	0.3435
5	1.0356	1.8182	2.8908	0.1755
6	1.0181	1.9075	2.9444	0.0893

[verze: 20. *XI.* 2016]