

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

- zabýváme se řešením systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- maticový zápis:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ kde}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

LU rozklad:

- rozklad matice soustavy A na součin horní (U) a dolní (L) trojúhelníkové matice tak, aby

$$A = L \cdot U, \text{ kde } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ a } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

- GEM lze provést bez výměny řádku $\Rightarrow A = L \cdot U$
GEM nelze provést bez výměny řádku $\Rightarrow P \cdot A = L \cdot U$, kde P je permutační matice
- postup pro výpočet

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \longrightarrow 1. L\mathbf{y} = \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{y} \\ &2. U\mathbf{x} = \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}, \text{ resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \cdot A\mathbf{x} &= P \cdot \mathbf{b} \\ L \underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} &= P \cdot \mathbf{b} \longrightarrow 1. L\mathbf{y} = P \cdot \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{y} \\ &2. U\mathbf{x} = \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Příklad. LU rozkladem řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ -3x_1 - 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

- GEM bez výměny řádků,
- GEM s částečným výběrem pivota.

Řešení.

a) GEM bez výměny řádků

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- ověření rovnosti $A = L \cdot U$:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = A$$

- řešení z LU rozkladu:

1. řešení $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) GEM s částečným výběrem pivotů:

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- ověření rovnosti $P \cdot A = L \cdot U$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- řešení z LU rozkladu:

1. řešení $Ly = P \cdot b$:

$$P \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 3 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$