

ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b \rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

NEWTONOVA METODA = METODA TEČEN

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, f'(x_i) \neq 0, i = 0, 1, \dots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x) \in C^2(I)$
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na I
3. volba počáteční aproximace: x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

METODA SEČEN

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i), i = 1, 2, \dots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $[x_{i-1}, f(x_{i-1})], [x_i, f(x_i)]$ s osou x
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

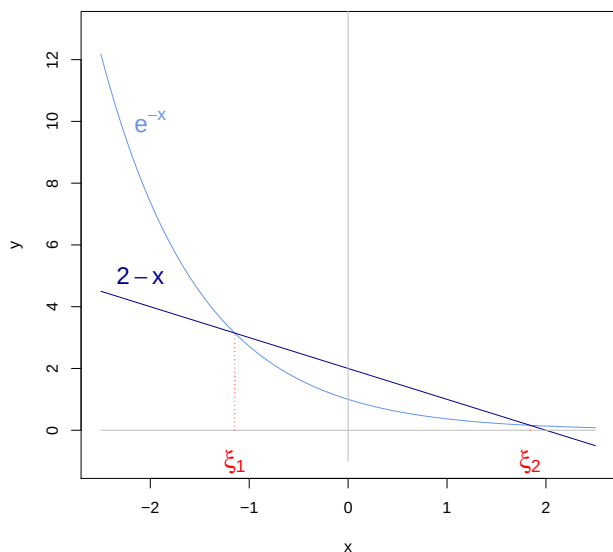
Příklad 1. Najděte všechny kořeny rovnice $x + e^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

- a) metodou tečen,
- b) metodou sečen.

Řešení.

SEPARACE KOŘENŮ: hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$\begin{aligned} x + e^{-x} - 2 &= 0 \\ e^{-x} &= 2 - x \end{aligned}$$



$$f(x) = x + e^{-x} - 2$$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 3.3891 \\ f(-1) &= -0.2817 \end{aligned} \right\} f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(2) &= 0.1353 \end{aligned} \right\} f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) **metoda tečen:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

STOP kritérium: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

- odhad záporného kořene:

Fourierovy podmínky:

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $
0			
1			
2			
3	-1.1488	-1.1462	0.0026 < 0.01

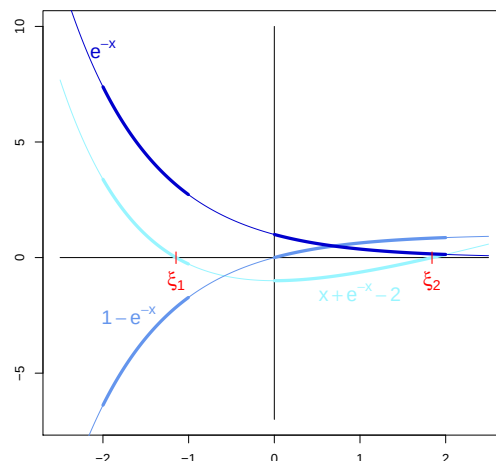
odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_2 = -1.1462 \pm 0.0026$$

- odhad kladného kořene:

Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + e^{-x} - 2 \in C\langle 0, 2 \rangle$
 $f'(x) = 1 - e^{-x} \in C\langle 0, 2 \rangle$
 $f''(x) = e^{-x} \in C\langle 0, 2 \rangle$
2. $f'(x) = 1 - e^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2 \rangle$
 $f''(x) = e^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2 \rangle$
3. volba počáteční aproximace x_0 :
 $f(0) = -1$
 $f(2) = 0.1353 \rightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \rightarrow x_0 = 2$



výpočet:

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $
0	2	1.8435	0.1565
1	1.8435	1.8414	0.0021 < 0.01

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 = 1.8414 \pm 0.0021$$

b) **metoda sečen:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i), i = 1, 2, \dots$$

$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

- odhad záporného kořene:

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	
1					1. krok zadáním intervalu
2					
3	-1.0767	-1.1543	-1.1458	0.0085 < 0.01	$\Rightarrow -1.1458 \pm 0.0085$
1	-2	-1.4696	-1.2842	0.1854	1. krok pomocí metody tečen
2	-1.4696	-1.2842	-1.1738	0.1104	
3	-1.2842	-1.1738	-1.1488	0.025	
4	-1.1738	-1.1488	-1.1462	0.0026 < 0.01	$\Rightarrow -1.1462 \pm 0.0026$
1	-1	-1.1640	-1.1442	0.0198	1. krok pomocí metody tečen
2	-1.164	-1.1442	-1.1462	0.002 < 0.01	$\Rightarrow -1.1462 \pm 0.002$

- odhad kladného kořene:

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	
1	0	2	1.7616	0.2384	1. krok zadáním intervalu
2	2	1.7616	1.8403	0.0787	
3	1.7616	1.8403	1.8414	0.0011 < 0.01	$\Rightarrow 1.8414 \pm 0.0011$
1	2	1.8435	1.8414	0.0021 < 0.01	$\Rightarrow 1.8414 \pm 0.0021$ (1. krok pomocí metody tečen)
1	0		–	–	metoda tečen nelze použít pro počáteční aproximaci 0
1	0.01	100.5058	1.0199	99.4859	metoda tečen s počáteční aproximací 0.01
2	100.5058	1.0199	1.6416	0.6217	
3	1.0199	1.6416	1.8668	0.2252	
4	1.6416	1.8668	1.8409	0.0259	
5	1.8668	1.8409	1.8414	0.0005 < 0.01	$\Rightarrow 1.8414 \pm 0.0005$

Řešený příklad z praxe.

Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost v je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a $c = 13 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95 \text{ kg}$. Odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti $35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

- Newtonovou metodou,
- metodou sečen.



Zdroj: [1]

Řešení. Vycházíme z rovnice

$$v = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

a řešíme $f(t) = 0$, kde

$$f(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v.$$

Volíme interval $I = \langle 3, 6 \rangle$.

- Newtonova metoda**

Ověření Fourierových podmínek:

- $f(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v \in C(\langle 3, 6 \rangle)$
 $f'(t) = \frac{gm}{c} \left(-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \cdot \frac{-c}{m} = \dots = ge^{-\frac{c}{m}t} \in C(\langle 3, 6 \rangle)$
 $f''(t) = -\frac{cg}{m} e^{-\frac{c}{m}t} \in C(\langle 3, 6 \rangle)$
- $f'(t) = ge^{-\frac{c}{m}t}$ nemění znaménko na I (funkci si nakreslete!)
 $f''(t) = -\frac{cg}{m} e^{-\frac{c}{m}t}$ nemění znaménko na I (funkci si nakreslete!)
- volba počáteční aproximace x_0 :

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = -10.8872 \\ f(6) = 5.1069 \end{array} \right\} f(3) \cdot f''(3) > 0 \longrightarrow x_0 = 3$$

iterační proces:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$ x_{i+1} - x_i $
0	3.0000	4.6749	1.6749
1	4.6749	4.8988	0.2239
2	4.8988	4.9023	0.0035
3	4.9023	4.9023	0.00000084 < 0.001

odhad kořene:

$$\hat{t} = 4.9023 \pm 0.0000$$

a) **metoda sečen**

iterační proces:

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $	
1	3	6	5.0421	0.9579	1. krok zadáním intervalu
2	6	5.0421	4.8915	0.1506	
3	5.0421	4.8915	4.9024	0.010902	
4	4.8915	4.9024	4.9023	0.00010352 < 0.01	$\Rightarrow 4.9023 \pm 0.00010352$
1	3	4.6749	4.8741	0.19922	1. krok pomocí metody tečen
2	4.6749	4.8741	4.9019	0.027745	
3	4.8741	4.9019	4.9023	0.00043508 < 0.01	$\Rightarrow 4.9023 \pm 0.00043508$