INTERPOLAČNÍ POLYNOM:

- aproximace zadaných hodnot funkcí $F(x)$ (polynomem)
- hodnoty zadaných bodů a funkce $F(x)$ se shodují v daných bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- značení:
  $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ... vzájemně různé body (uzly)
  $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ... dané hodnoty
  $F(x)$ ... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

  $\mathcal{P}^{(n)}$ ... množina všech polynomů stupně $\leq n$

LAGRANGEŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- konstrukce:

Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x).$$

Fundamentální polynomy:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Platí: $L_i(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \Rightarrow F(x) = L(x).$

INTERPOLAČNÍ POLYNOM V NEWTONOVĚ TVARU

- konstrukce:

Interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}),\text{ kde}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

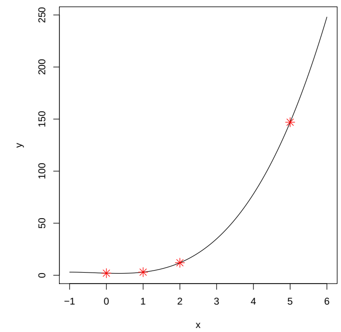
$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

Příklad. Pro zadané hodnoty sestrojte

a) Lagrangeův interpolační polynom,

b) Newtonův interpolační polynom.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147



Řešení.

a) Lagrangeův interpolační polynom:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-5)} = \qquad = -\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

$$L_1(x) = \qquad = \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x)$$

$$L_2(x) = \qquad = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x)$$

$$L_3(x) = \qquad = \frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

Langrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x) = \dots$$

$$\dots = x^3 + x^2 - x + 2$$

b) Newtonův interpolační polynom:

Tabulka poměrných diferencí

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	2			
1	1	3			
2	2	12			
3	5	147			

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) =$$

$$\dots = x^3 + x^2 - x + 2$$

Řešený příklad. Náhrada funkce e^x.
Nalezněte interpolační polynom (v Lagrangeově i Newtonově tvaru), který aproximuje funkci e^x a prochází body o hodnotách

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$;

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$;

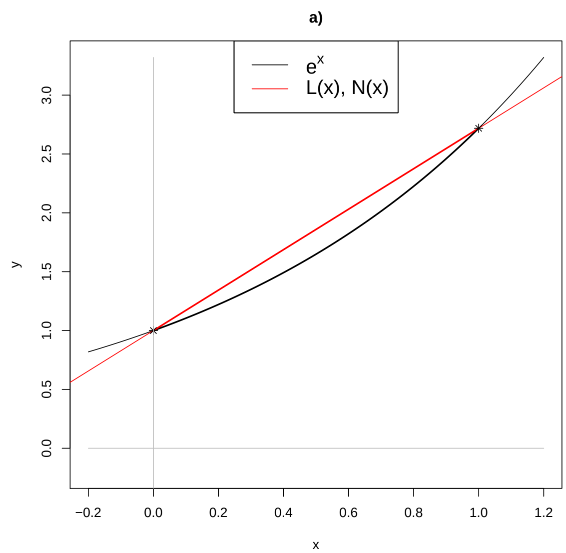
c) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

d) $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.

Řešení.

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

i	0	1
x_i	0	1
y_i	1	e



- $\boxed{\textbf{Lagrangeův interpolační polynom}}$:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = -(x-1) = 1 - x$$
$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i \cdot L_i(x) = 1 \cdot (1-x) + \mathrm{e} \cdot x = 1 + x\,(\mathrm{e}-1) \doteq 1 + 1.7182\,x$$

- $\boxed{\textbf{Newtonův interpolační polynom}}$:

Tabulka poměrných diferencí

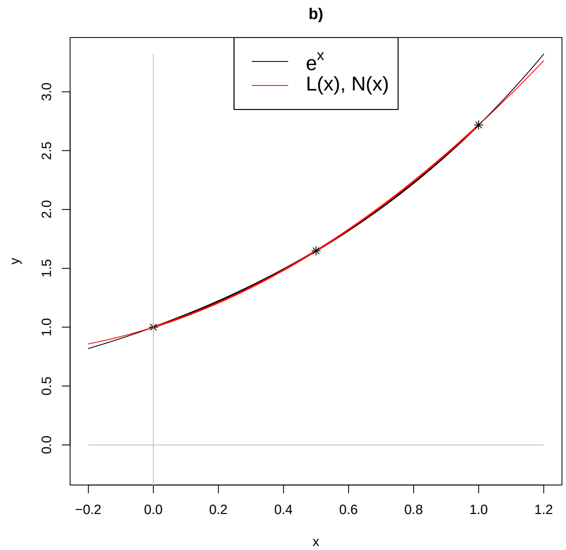
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$
0	1	
		$\frac{\mathrm{e}-1}{1} = \mathrm{e} - 1$
1	e	

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + (\mathrm{e}-1)\,x \doteq 1 + 1.7182\,x$$

b) $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$

i	0	1	2
x_i	0	0.5	1
y_i	1	1.6487	2.7182



- **Lagrangeův interpolační polynom**:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)\cdot(x-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)} = -4\,x\,(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2\,x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\cdot L_i(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1) - 1.6487\cdot 4\,x\,(x-1) + 2.7182\cdot 2\,x\left(x-\frac{1}{2}\right) = 1 + 0.8766\,x + 0.8416\,x^2$$

- **Newtonův interpolační polynom**:

Tabulka poměrných diferencí

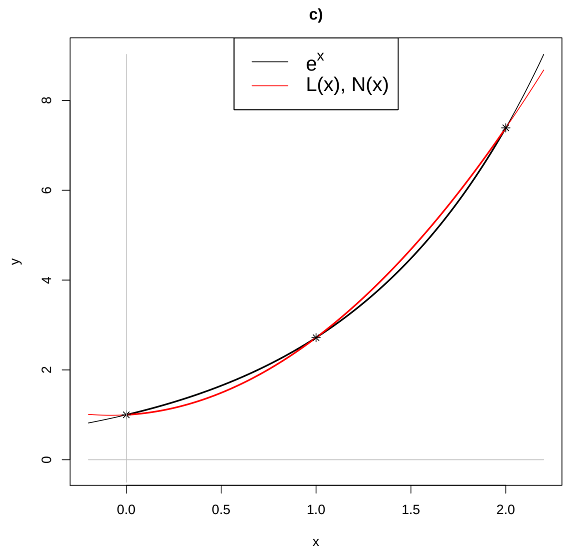
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	1		
		$\frac{1.6487-1}{0.5-0} = 1.2974$	
0.5	1.6487		$\frac{2.1392-1.2974}{1-0} = 0.8418$
		$\frac{2.7182-1.6487}{1-0.5} = 2.1392$	
1	2.7182		

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.2974\,x + 0.8418\,x\left(x-\frac{1}{2}\right) = 1 + 0.8765\,x + 0.8418\,x^2$$

c) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	1	2.7182	7.3891



- **Lagrangeův interpolační polynom**:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)} = \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-2)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)} = -x(x-2)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)} = \frac{1}{2}x\,(x-1)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i(x) = \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-2) - 2.7182\,x(x-2) + 7.3891 \cdot \frac{1}{2}\,x\,(x-1) = 1 + 0.2419\,x + 1.4764\,x^2$$

- **Newtonův interpolační polynom**:

Tabulka poměrných diferencí

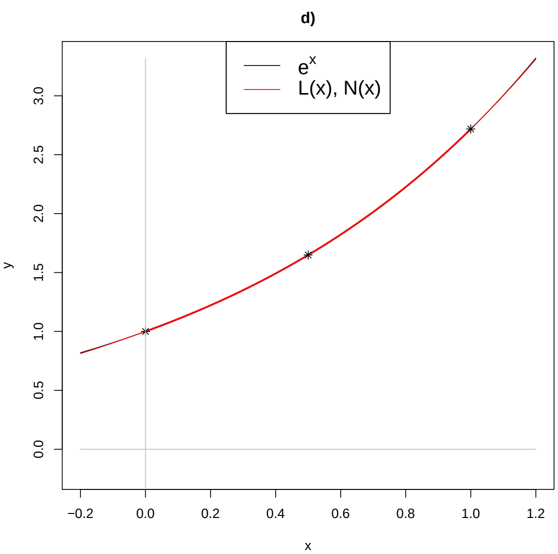
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	1		
		$\frac{2.7182-1}{1-0} = 1.7182$	
1	2.7182		$\frac{4.6709-1.7182}{2-0} = 1.4764$
		$\frac{7.3891-2.7182}{2-1} = 4.6709$	
2	7.3891		

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.7182\,x + 1.4764\,x\,(x-1) = 1 + 0.2419\,x + 1.4764\,x^2$$

d) $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y_i	1	1.3956	1.9477	2.7182



- **Lagrangeův interpolační polynom:**

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}{\left(0-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(0-\frac{2}{3}\right)\cdot(0-1)} = \ldots = -\frac{2}{9}\left(x^3 - 2\,x^2 + \frac{11}{9}\,x - \frac{2}{9}\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}{\left(\frac{1}{3}-0\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \ldots = \frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right)$$

$$L_2(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)} = \ldots = -\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right)$$

$$L_3(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \ldots = \frac{2}{9}\left(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x\right)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x) \\ &= -\frac{2}{9}\left(x^3 - 2\,x^2 + \frac{11}{9}\,x - \frac{2}{9}\right) + 1.3956\cdot\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 1.9477\cdot\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right) \\ &\quad + 2.7182\cdot\frac{2}{9}\left(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x\right) \\ &= \ldots = 0.2786\,x^3 + 0.4257\,x^2 + 1.0140\,x + 1 \end{aligned}$$

- **Newtonův interpolační polynom:**

Tabulka poměrných diferencí

x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	1			
		$\frac{1.3956-1}{\frac{1}{3}-0} = 1.1868$		
$\frac{1}{3}$	1.3956		$\frac{1.6563-1.1868}{\frac{2}{3}-1} = 0.70425$	
		$\frac{1.9477-1.3956}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 1.6563$		$\frac{0.9828-0.70425}{1-0} = 0.27855$
$\frac{2}{3}$	1.9477		$\frac{2.3115-1.6563}{1-\frac{1}{3}} = 0.9828$	
		$\frac{2.7182-1.9477}{1-\frac{2}{3}} = 2.3115$		
1	2.7182			

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.1868\,x + 0.70425\,x\left(x-\frac{1}{3}\right) + 0.27855\,x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) = 1 + 1.0140\,x + 0.4257\,x^2 + 0.2786\,x^3$$

Tipy pro zamyšlení:

- Jak se chová přesnost odhadu, pokud zvyšujeme počet uzlů?
- Jak se chová přesnost odhadu, pokud při zadaném počtu uzlů zvětšujeme interval, na kterém jsou uzly dány?