

ITERAČNÍ METODY PRO SYSTÉMY NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Řešíme systém m nelineárních rovnic o m neznámých:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

vektorový zápis soustavy: $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^m$, řešení: $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)' \in \mathbb{R}^m$.

Metoda prosté iterace

Namísto původní úlohy $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ řešíme ekvivalentní úlohu $\mathbf{x} = G(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, tj. hledáme pevné body zobrazení G .

Iterační vztah:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k) \\ &\vdots \\ x_m^{k+1} &= g_m(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k). \end{aligned}$$

Konvergence: $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq q < 1$ pro každé $\mathbf{x} \in O(\boldsymbol{\xi})$, $i, j = 1, \dots, m$.

Příklad. Pro zadaný systém najděte metodou prosté iterace kořen z I. kvadrantu.

$$\begin{aligned} x &= \frac{8x - 4x^2 + y^2 + 1}{8}, \\ y &= \frac{2x - x^2 + 4y - y^2 + 3}{4}. \end{aligned}$$

Řešení.

1. počáteční aproximace – úprava rovnic pro nalezení průsečíku

1. rovnice:

$$8x = 8x - 4x^2 + y^2 + 1$$

$4x^2 - y^2 = 1 \dots$ rovnice hyperboly, hledáme průsečíky s osami:

$$\text{průsečík s osou } x: y = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

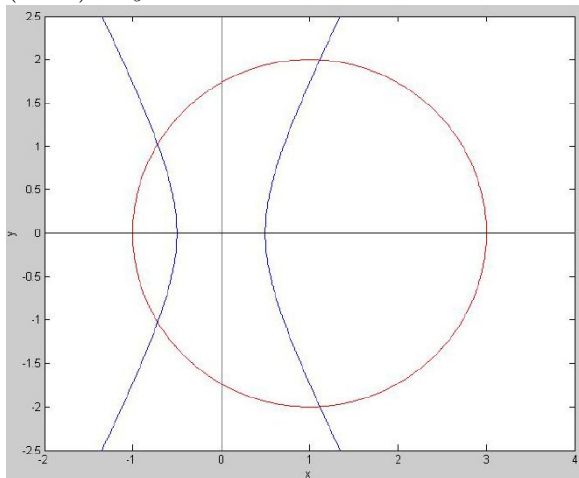
průsečík s osou $y: x = 0 \longrightarrow y^2 + 1 = 0 \dots$ nemá reálný průsečík

2. rovnice:

$$4y = 2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

$(x-1)^2 + y^2 = 4 \dots$ rovnice kružnice se středem $S = (1, 0)'$ a poloměrem $r = 2$



$\Rightarrow$ počáteční aproximace: $\mathbf{x}^0 = (1, 2)'$

2. konvergence:

$$\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} = 1 - x, \quad \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{4}y, \quad \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}y,$$

$$\left| \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} + \left| \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} + \left| \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = 0 < 1$$

3. výpočet

$$\mathbf{x}^0 = (1, 2)'$$

$$x^1 = \frac{8x^0 - 4(x^0)^2 + (y^0)^2 + 1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$y^1 = \frac{2x^0 - (x^0)^2 + 4y^0 - (y^0)^2 + 3}{4} = 2$$

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{9}{8}, 2\right)'$$

$$\mathbf{x}^2 \approx (1.1172, 1.9961)'$$

$$\mathbf{x}^3 \approx (1.1162, 1.9966)' \quad \text{STOP: } \frac{\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|}{\|\mathbf{x}^k\|} < \varepsilon = 10^{-3}$$

Seidelova metoda

Iterační vztah:

$$x_1^{k+1} = g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k)$$

$$x_2^{k+1} = g_2(\mathbf{x}_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_m^k)$$

$$\vdots$$

$$x_m^{k+1} = g_m(\mathbf{x}_1^{k+1}, \mathbf{x}_2^{k+1}, \dots, \mathbf{x}_{m-1}^{k+1}, x_m^k).$$

Příklad. Předchozí příklad pomocí Seidelovy metody.

Řešení.

počáteční aproximace: $\mathbf{x}^0 = (1, 2)'$

1. iterace:

$$x^1 = \frac{9}{8}$$

$$y^1 = \frac{2x^1 - (x^1)^2 + 4y^0 - (y^0)^2 + 3}{4} \approx 1.9961$$

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{9}{8}, 1.9961\right)'$$

$$\mathbf{x}^2 \approx (1.1152, 1.9967)'$$

$$\mathbf{x}^3 \approx (1.1167, 1.9966)' \quad \text{STOP: } \frac{\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|}{\|\mathbf{x}^k\|} < \varepsilon = 10^{-3}$$

Newtonova metoda

Zabýváme se řešením úlohy $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, uvažujeme ekvivalentní úlohu ve tvaru $\mathbf{x} = G(\mathbf{x})$ s iterační maticí

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J_F^{-1}(\mathbf{x})F(\mathbf{x}),$$

$$\text{kde } J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ se nazývá Jacobiova matice funkce } F.$$

Newtonova iterační metoda pro systém $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ za předpokladu, že $J_F(\mathbf{x})$ je regulární, se spojitými prvky v okolí bodu ξ :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - J_F^{-1}(\mathbf{x}^k)F(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Postup pro výpočet:

1. označme $\Delta^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$
2. $J_F(\mathbf{x}^k)\Delta^k = -F(\mathbf{x}^k) \rightarrow$ výpočet Δ^k
3. dosazení do iteračního vztahu: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta^k$

Příklad. Vypočítejte první dva kroky Newtonovy metody pro za daný systém rovnic

$$\begin{aligned} f_1 : \quad x^2 - x + y - \frac{1}{2} &= 0 \\ f_2 : \quad x^2 - 5xy - y &= 0 \end{aligned}$$

a počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Řešení. Výpočet parciálních derivací a sestavení Jacobiho matice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} &= 2x - 1, & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} &= 2x - 5y, & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} &= -5x - 1, \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Jacobiho matice: $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x - 5y & -5x - 1 \end{pmatrix}$.

Označme $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ a počítejme soustavu $J_F(\mathbf{x}^0)\Delta^0 = -F(\mathbf{x}^0)$, kde

$$J_F(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x^0 - 1 & 1 \\ 2x^0 - 5y^0 & -5x^0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad -F(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

kterou vyřešíme (Gaussova eliminační metoda):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \Delta^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

1. krok:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Výpočet Δ^1 : řešíme soustavu $J_F(\mathbf{x}^1)\Delta^1 = -F(\mathbf{x}^1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{29}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta^1 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix},$$

2. krok:

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \Delta^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{776} \\ -\frac{29}{776} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.2332 \\ 0.2126 \end{pmatrix}.$$