

## ITERAČNÍ METODY PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Uvažujeme systém lineárních rovnic  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  s regulární maticí  $A \in M_n$

Princip iteračních metod: převést soustavu  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  na systém  $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{g}$ ,  $T \in M_n$

Iterační proces:  $\mathbf{x}^{k+1} = T\mathbf{x}^k + \mathbf{g}$  s iterační maticí  $T$ , její vhodnou volbou dostáváme konkrétní iterační metodu.

Iterační metody využívají následujícího rozkladu matice soustavy  $A$ :

$$A = D - L - U,$$

kde  $D$  značí diagonální matici,  $L$  záporně vzatou dolní trojúhelníkovou matici bez diagonály a  $U$  záporně vzatou horní trojúhelníkovou matici bez diagonály:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

## JACOBOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

řešíme rozkladem matice  $A = D - L - U$ . Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ D\mathbf{x} &= (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underbrace{D^{-1}(L + U)}_{T_J} \mathbf{x}^k + \underbrace{D^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}$$

s iterační maticí  $T_J$ .

**Konvergence metody:**

- Necht' je matice  $A$  ryze řádkově nebo sloupcově diagonálně dominantní, pak metoda konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ .

A ryze řádkově diagonálně dominantní:  $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \quad i = 1, \dots, n$

A ryze sloupcově diagonálně dominantní:  $|a_{k,k}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{i,k}| \quad k = 1, \dots, n$

- Metoda konverguje pro všechny počáteční aproximace  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \rho(T_J) < 1$   
 $\rho(T_J)$  ... spektrální poloměr iterační matice  $T_J$ ,  $\rho(T_J) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}$ , tj. největší vlastní číslo v absolutní hodnotě

## GAUSS-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

řešíme rozkladem matice  $A = D - L - U$ . Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D - L)\mathbf{x} &= U\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= (D - L)^{-1}U\mathbf{x} + (D - L)^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = \underbrace{(D - L)^{-1}U}_{T_{GS}} \mathbf{x}^k + \underbrace{(D - L)^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{GS}}$$

s iterační maticí  $T_{GS}$ .

**Konvergence metody:**

- stejná kritéria jako pro Jacobiovu iterační metodu + další možné kritérium:
- Nechť  $A$  je pozitivně definitní matice, pak Gauss-Seidelova metoda konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Poznámka.* Konverguje-li Jacobiova i Gauss-Seidelova metoda, Gauss-Seidelova metoda konverguje rychleji.

*Příklad.* Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gauss-Seidelovou metodou, pro počáteční aproximaci  $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$  spočítejte první dvě iterace.

*Řešení.* Ověření konvergence: Pro matici soustavy  $A$  platí:

$$3 > 1 + 1, 4 > 2 + 1, 3 > 1 + 1,$$

je tedy ryze řádkově diagonálně dominantní  $\Rightarrow$  obě metody konvergují pro libovolnou počáteční aproximaci.

- Jacobiova metoda: při výpočtu budeme vycházet ze vztahu

$$D\mathbf{x}^{k+1} = (L + U)\mathbf{x}^k + \mathbf{b},$$

maticový zápis:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1^{k+1} &= -x_2^k - x_3^k + 2 \\ 4x_2^{k+1} &= -2x_1^k - x_3^k + 4 \\ -3x_3^{k+1} &= x_1^k + x_2^k - 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^T \quad (\text{počáteční aproximace ze zadání})$$

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)^T$$

$$\mathbf{x}^2 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{12}, -\frac{2}{9}\right)^T$$

- Gauss-Seidelova metoda: při výpočtu budeme vycházet ze vztahu

$$(D - L)\mathbf{x}^{k+1} = U\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$$

maticový zápis:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^k + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1^{k+1} &= -x_2^k - x_3^k + 2 \\ 4x_2^{k+1} &= -2x_1^{k+1} - x_3^k + 4 \\ -3x_3^{k+1} &= x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^T \quad (\text{počáteční aproximace ze zadání})$$

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{9}\right)^T$$

$$\mathbf{x}^2 = \left(\frac{13}{27}, \frac{85}{108}, -\frac{92}{324}\right)^T$$

*Poznámka.* Pokud bychom počítali do zastavení výpočtu (STOP kritérium:  $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < \varepsilon = 10^{-3}$ ):

Jacobiova metoda:  $\mathbf{x}^{19} \approx (0.42345, 0.8081, -0.07655)^T$

Gauss-Seidelova metoda:  $\mathbf{x}^6 \approx (0.4231, 0.8077, -0.0769)^T$

Vidíme tedy, že pokud konvergují obě metody, Gauss-Seidelova metoda konverguje rychleji.

*Příklad.* Ukažte, že Gauss-Seidelova metoda pro daný systém diverguje.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Řešení.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potřebujeme inverzní matici k matici  $D - L$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastních čísel iterační matice  $T_{GS}$ :

$$\det(T_{GS} - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = \lambda(1 - \lambda^2) = \lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

vlastní čísla:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

spektrální poloměr:  $\rho(T_{GS}) = \max\{|-1|, |0|, |1|\} = 1 \dots$  divergence

## Funkce pro počítačové cvičení

|                                         |                                                                                    |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>diag(A)</code>                    | vektor diagonálních prvků matice <b>A</b>                                          |
| <code>diag(diag(A))</code>              | diagonální matice                                                                  |
| <code>tril(A)</code>                    | dolní trojúhelníková matice (obsahující diagonálu)                                 |
| <code>tril(A, -1)</code>                | dolní trojúhelníková matice začínající první diagonálou pod hlavní diagonálou      |
| <code>triu(A)</code>                    | horní trojúhelníková matice (obsahující diagonálu)                                 |
| <code>triu(A, 1)</code>                 | horní trojúhelníková matice začínající první diagonálou nad hlavní diagonálou      |
| <code>[values, vectors] = eig(A)</code> | vrací vlastní čísla <b>values</b> a vlastní vektory <b>vectors</b> matice <b>A</b> |
| <code>norm(A)</code>                    | Euklidovská maticová /vektorová norma                                              |
| <code>norm(A, Inf)</code>               | norma $\ A\ _{\infty}$ , pro ostatní normy viz doc <code>norm</code>               |
| <code>x = A\b</code>                    | řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot x = b$                                  |