

NEWTONOVA METODA PRO NÁSOBNÉ KOŘENY

Předpokládejme, že kořen ξ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ násobnosti $M > 1$.

Iterační vztah pro modifikovanou Newtonovu metodu:

$$x^{k+1} = x^k - M \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Příklad. Řešte Newtonovou metodou pro násobné kořeny rovnici $(x^2 - 3)^4 = 0$, víte-li, že $\sqrt{3}$ je 4-násobný kořen. Volte $x^0 = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3)^4 \\ f'(x) &= 8x(x^2 - 3)^3 \end{aligned}$$

$$x^0 = 2$$

$$x^1 = x^0 - 4 \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = 1.75$$

$$x^2 = x^1 - 4 \frac{f(x^1)}{f'(x^1)} \approx 1.7321$$

$$x^3 \approx 1.7320 \quad \text{STOP: } |x^{k+1} - x^k| < \varepsilon \wedge |f(x^{k+1})| < \varepsilon$$

Srovnání s Newtonovou metodou:

- ověření Fourierových podmínek na intervalu $I = [1, 2]$:

1. $f(x) = (x^2 - 3)^4$, $f'(x) = 8x(x^2 - 3)^3$ i $f''(x) = 8(x^2 - 3)^2(7x^2 - 3)$ spojité na I

2. Mění $f'(x)$ a $f''(x)$ na I znaménko?

$f'(x) = \underbrace{8x}_{>0} \cdot \underbrace{(x^2 - 3)^3}_{\text{mění znaménko v } \sqrt{3}} \rightarrow f'(x) \text{ mění znaménko na } I \rightarrow \text{Fourierovy podmínky nesplněny} \rightarrow$
není zaručena konvergence (přesto vyzkouším)

•

$$x^0 = 2$$

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \approx 1.9375$$

$$x^2 \approx 1.8889$$

$$\vdots$$

$$x^{24} \approx 1.7323 \quad \text{STOP: } |x^{k+1} - x^k| < \varepsilon \wedge |f(x^{k+1})| < \varepsilon$$

Poznámka. Obvykle násobnost kořene předem neznáme. Víme ale, že $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ má v bodě $x = \xi$ jednoduchý kořen bez ohledu na násobnost kořene původní funkce. Místo rovnice $f(x) = 0$ uvažujme tedy rovnici $u(x) = 0$, jejíž kořeny jsou totožné s kořeny dané rovnice a jsou všechny jednoduché.

Řešení pro předchozí příklad.

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x^2 - 3)^4}{8x(x^2 - 3)^3} = \frac{x^2 - 3}{8x}$$

$$u'(x) = \frac{x^2 + 3}{8x^2}$$

$$x^0 = 2$$

$$x^1 = x^0 - \frac{u(x^0)}{u'(x^0)} = 1.75$$

$$x^2 = x^1 - \frac{u(x^1)}{u'(x^1)} \approx 1.7321$$

$$x^3 \approx 1.7320 \quad \text{STOP: } |x^{k+1} - x^k| < \varepsilon \wedge |f(x^{k+1})| < \varepsilon$$