

1. Metodou nejmenších čtverců nalezněte přímku aproximující zadané body:

|     |    |    |   |
|-----|----|----|---|
| $X$ | -1 | 0  | 1 |
| $Y$ | -3 | -1 | 2 |

2. Najděte předpis přímky, která je ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlepší aproximací bodů  $[1, 1]$ ,  $[2, -1]$ ,  $[3, 2]$  a  $[4, 2]$ . Jaká funkční hodnota odpovídá hodnotě  $\frac{5}{3}$ ?
3. U osmi náhodně vybraných studentů byly zjišťovány jejich matematické a verbální schopnosti. Výsledky matematického testu udává znak  $X$ , výsledky verbálního  $Y$ . Metodou nejmenších čtverců vyjádřete závislost výsledků verbálního znaku na znaku matematickém.

|     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $X$ | 80 | 50 | 36 | 58 | 72 | 60 | 56 | 68 |
| $Y$ | 65 | 60 | 35 | 39 | 48 | 44 | 48 | 61 |

4. Integrujte podle základních vzorců:

(i)  $\int (x^3 + x^2 - 2x) dx$

(ii)  $\int (\sqrt{x} + 3x^{-\frac{1}{3}}) dx$

(iii)  $\int x^2(x - 2) dx$

(iv)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$

(v)  $\int (\sin x - 2 \cos x) dx$

(vi)  $\int \left(4 + \frac{1}{x}\right) dx$

(vii)  $\int \sqrt[3]{x^2}(x^2 + 1) dx$

(viii)  $\int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx$

(ix)  $\int \sqrt{x} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

5. Spočítejte integrály typu  $\int f(ax + b) dx$ :

(i)  $\int \cos(3x + 1) dx$

(ii)  $\int (\cos 3x + 1) dx$

(iii)  $\int (1 + 2x)^3 dx$

(iv)  $\int \sqrt[5]{2x - 3} dx$

(v)  $\int 7^{-2x+3} dx$

(vi)  $\int e^{\frac{1}{3}x-5} dx$

(vii)  $\int \frac{4}{\sqrt{2-3x}} dx$

6. Spočítejte integrály typu  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

(i)  $\int \frac{2}{3-x} dx$

(ii)  $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3} dx$

(iii)  $\int \cot g x dx$

(iv)  $\int \frac{e^x}{2-e^x} dx$

(v)  $\int \frac{2x}{3x^2+1} dx$

7. Spočítejte integrály typu  $\int \frac{1}{A^2+x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{A^2-x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} dx$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx$

- (i)  $\int \frac{1}{x^2+4} dx$
- (ii)  $\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}} dx$
- (iii)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-18}} dx$
- (iv)  $\int \frac{1}{6-3x^2} dx$
- (v)  $\int \frac{1}{x^2-x+2} dx$
- (vi)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$
- (vii)  $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}} dx$
- (viii)  $\int \frac{1}{4x-x^2} dx$

## ŘEŠENÍ

1.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$
2.  $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$
3.  $y = 0.5015x + 19.908$
4. (i)  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$   
 (ii)  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$   
 (iii)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$   
 (iv)  $\frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + c$   
 (v)  $-\cos x - 2\sin x + c$   
 (vi)  $4x + \ln x + c$   
 (vii)  $\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$   
 (viii)  $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$   
 (ix)  $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 2\sqrt{2} + c$
5. (i)  $\sin x - x \cdot \cos x + c$   
 (ii)  $x \cdot \sin x + \cos x + c$   
 (iii)  $x(\ln x - 1) + c$   
 (iv)  $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-3)^6} + c$   
 (v)  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{7^{-2x+3}}{\ln 7} + c$   
 (vi)  $3e^{\frac{1}{3}x-5} + c$   
 (vii)  $-\frac{8}{3}\sqrt{2-3x} + c$
6. (i)  $-2\ln|3-x| + c$   
 (ii)  $\ln|2x^2-5x+3| + c$   
 (iii)  $\ln|\sin x| + c$

- (iv)  $-\ln|2 - e^x| + c$   
 (v)  $\frac{1}{3} \ln|3x^2 + 1| + c$   
 7. (i)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$   
 (ii)  $\arcsin 3x + c$   
 (iii)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + c$   
 (iv)  $\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right| + c$   
 (v)  $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{7}} + c$   
 (vi)  $\ln|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}| + c$   
 (vii)  $\frac{1}{3} \arcsin(x + \frac{1}{3}) + c$   
 (viii)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{4-x} \right| + c$

**Doplňk ke cvičením.** Řešené integrály typu  $\int \frac{1}{A^2+x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{A^2-x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}} dx$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx$

1. 
$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 12} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 8} dx = \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{8}} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2\sqrt{2}} + c$$

Rozklad na čtverec:  $x^2 - 4x + 12 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 + 8 = (x-2)^2 + 8$

2. 
$$\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)^2 + 6} dx = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$$

Rozklad na čtverec:  $x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2 \cdot 2x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6$

3. 
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+x^2} dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} dx = - \int \frac{1}{\frac{1}{4} - (x+\frac{1}{2})^2} dx = - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - (x+\frac{1}{2})} \right| + c \\ &= - \ln \left| \frac{x+1}{-x} \right| + c = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c \end{aligned}$$

Rozklad na čtverec:  $x^2 + x = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

4. 
$$\int \frac{1}{-x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{3 - (x-1)^2} dx = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + x - 1}{\sqrt{3} - x + 1} \right| + c$$

Rozklad na čtverec:  $-(x^2 - 2x - 2) = -(x^2 - 2 \cdot 1x + 1 - 3) = -((x-1)^2 - 3) = -(x-1)^2 + 3$

5. 
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}} dx = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

Rozklad na čtverec:  $-(x^2 + 2x - 1) = -(x^2 + 2 \cdot 1x + 1 - 2) = -((x+1)^2 - 2) = -(x+1)^2 + 2$

6.

$$\int \frac{3}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} dx = 3 \arcsin \frac{x-1}{3} + c$$

Rozklad na čtverec:  $-(x^2 - 2x - 8) = -(x^2 - 2 \cdot 1x + 1 - 9) = -((x-1)^2 - 9) = -(x-1)^2 + 9$

7.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \right| + c \end{aligned}$$

Rozklad na čtverec:  $x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = (x - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$

8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} dx = \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right| + c$$

Rozklad na čtverec:  $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2 \cdot 1x + 1 - 4 = (x+1)^2 - 4$

## REFERENCE

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

DĚMIDOVÍČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. 1. vydání. Praha: Fragment 2003. ISBN 80-7200-587-1