1. Spočítejte derivace:
   - (*i*) $f_1(x) = x^2 + x^3$
   - (*ii*) $f_2(x) = 4x^2 - x + 1$
   - (*iii*) $f_3(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$
   - (*iv*) $f_4(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5$
   - (*v*) $f_5(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$
   - (*vi*) $f_6(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{x^2}$
   - (*vii*) $f_7(x) = 2\sin x + 3\cos x$
   - (*viii*) $f_8(x) = x^7 - 7\cos x$
   - (*ix*) $f_9(x) = 6\text{ln}x - 9\log_{10} x$
   - (*x*) $f_{10}(x) = 3^x + 2\mathrm{e}^x$
2. Derivujte podle pravidel pro derivaci součinu a podílu:
   - (*i*) $f_1(x) = x \cdot \sin x$
   - (*ii*) $f_2(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x$
   - (*iii*) $f_3(x) = \sin x \cdot \mathrm{tg}x$
   - (*iv*) $f_4(x) = \frac{2x-1}{x+3}$
   - (*v*) $f_5(x) = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$
   - (*vi*) $f_6(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
   - (*vii*) $f_7(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^4+2}$
   - (*viii*) $f_8(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
   - (*ix*) $f_9(x) = \frac{1-x^4}{\sqrt[3]{\pi}}$
   - (*x*) $f_{10}(x) = \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^3+1)} + x(x^2-1)^2$
3. Vypočítejte derivace složených funkcí:
   - (*i*) $f_1(x) = (x^2 + 1)^6$
   - (*ii*) $f_2(x) = \sqrt{4x^3 - x}$
   - (*iii*) $f_3(x) = (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^8$
   - (*iv*) $f_4(x) = \frac{1}{(3x^4+x^2)^{10}}$
   - (*v*) $f_5(x) = \cos(2x + 4)$
   - (*vi*) $f_6(x) = \sin^2 x$
   - (*vii*) $f_7(x) = \sin(x^2)$
   - (*viii*) $f_8(x) = \ln(2x + 4)$
   - (*ix*) $f_9(x) = \ln(3\sin x - 8)$
   - (*x*) $f_{10}(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$
4. Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity
   - (*i*) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

(*ii*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

(*iii*) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^4-x^3+x-1}$

(*iv*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$

(*v*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+2x}{\sin x+x}$

(*vi*) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$

(*vii*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

(*viii*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

(*ix*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp^x-1}{x}$

(*x*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

Řešení

1. (*i*) $f_1'(x)=2x+3^2$

   (*ii*) $f_2'(x)=8x-1$

   (*iii*) $f_3'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\frac{1}{x^3}$

   (*iv*) $f_4'(x)=2\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

   (*v*) $f_5'(x)=-2x^{-3}-12x^{-4}$

   (*vi*) $f_6'(x)=-2x^{-2}-\frac{2}{35}x^{-\frac{3}{5}}$

   (*vii*) $f_7'(x)=2\cos x+3\sin x$

   (*viii*) $f_8'(x)=7x^6+7\sin x$

   (*ix*) $f_9'(x)=\frac{6}{x}-\frac{9}{x\cdot\ln 10}$

   (*x*) $f_{10}'(x)=3^x\ln 3+2\mathrm{e}^x$

2. (*i*) $f_1'(x)=\sin x+x\cos x$

   (*ii*) $f_2'(x)=2x\sin x+x^2\cos x-\cos x$

   (*iii*) $f_3'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

   (*iv*) $f_4'(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$

   (*v*) $f_5'(x)=\frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$

   (*vi*) $f_6'(x)=\frac{-2}{1-\sin 2x}$

   (*vii*) $f_7'(x)=-\frac{x^6+4x^5-4x^3-6x^2-8x}{(x^4+2)^2}$

   (*viii*) $f_8'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

   (*ix*) $f_9'(x)=\frac{4x^3}{\sqrt[3]{\pi}}$

   (*x*) $f_{10}'(x)=\frac{3x}{(x^2+1)^2}-\frac{4x^2}{(x^3+1)^2}+(x^2-1)(5x^2-1)$

3. (*i*) $f_1'(x)=12x(x^2+1)^5$

(*ii*) $f_2'(x) = \frac{12x^2-1}{2\sqrt{4x^3-x}}$

(*iii*) $f_3'(x) = \frac{24(\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$

(*iv*) $f_4'(x) = \frac{-10(12x^3+2x)}{(3x^4+x^2)^{11}}$

(*v*) $f_5'(x) = -2\sin(2x+4)$

(*vi*) $f_6'(x) = \sin(2x)$

(*vii*) $f_7'(x) = 2x\cos(x^2)$

(*viii*) $f_8'(x) = \frac{1}{x+2}$

(*ix*) $f_9'(x) = \frac{3\cos x}{3\sin x-8}$

(*x*) $f_{10}'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

4. (*i*) $\frac{5}{3}$

(*ii*) 4

(*iii*) $\frac{1}{3}$

(*iv*) 2

(*v*) $\frac{5}{2}$

(*vi*) 0

(*vii*) 8

(*viii*) 1

(*ix*) 1

(*x*) 0

Reference

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky.* 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3

[verze: 26. *X*. 2013]