

1. Určete vlastnosti funkcí:

- (i) $f_1 : y = x^3$
- (ii) $f_2 : y = x^4$
- (iii) $f_3 : y = \cot gx$
- (iv) $f_4 : y = \arccos x$
- (v) $f_5 : y = 4^x$
- (vi) $f_6 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- (vii) $f_7 : y = \ln x$
- (viii) $f_8 : y = x^{-2}$

2. Uvedte příklad:

- (i) shora i zdola omezené sudé funkce
- (ii) ryze monotonní funkce, která není ani sudá ani lichá
- (iii) liché periodické funkce
- (iv) prosté liché funkce

3. Najděte všechny celočíselné kořeny daného polynomu:

- (i) $P_1(x) = x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2$
- (ii) $P_2(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 17x^2 - 28x + 12$
- (iii) $P_3(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 3x$

4. Všechny polynomy z úkolu 3 rozložte na součin kořenových činitelů.

5. Zjistěte, kolikanásobným kořenem daného polynomu je číslo 3:

- (i) $x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27$
- (ii) $x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 15x + 9$
- (iii) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
- (iv) $x^3 - 3x^3 + 3x - 1$

6. Rozhodněte, zda je hodnota -1 kořenem daného polynomu:

- (i) $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- (ii) $P_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
- (iii) $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$
- (iv) $P_4(x) = x^2 + 2x + 1$
- (v) $P_5(x) = 2x^2 - 6x + 4$

7. Určete všechny kořeny následujících polynomů:

- (i) $P_1(x) = (x - 2)(x + 1)$
- (ii) $P_2(x) = x(x - \frac{3}{2})(x + e)$
- (iii) $P_3(x) = x(x - 3)^3(x + 1)$
- (iv) $P_4(x) = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 5)$

(v) $P_5(x) = x^2(x-2)^3$

8. Proveďte dělení polynomů:

(i) $(x^7 - 2x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 4) : (x + 1)$

(ii) $(-5x^4 + 4x^2 - 3x + 4) : (x^3 + 2x^2 - 4)$

(iii) $(-2x^6 - x^5 + 5x^4 + 2x^2 + 3x - 2) : (2x^2 - 3)$

ŘEŠENÍ

1. (i) lichá, není periodická, rostoucí, ryze monotonní, prostá, není ohraničená
(ii) sudá, není periodická, klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $\langle 0, \infty)$, není monotonní ani prostá, zdola ohraničená
(iii) lichá, periodická, klesající na $\{(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, není monotonní, prostá ani ohraničená
(iv) ani sudá ani lichá, klesající, ryze monotonní, prostá, ohraničená shora i zdola
(v) ani sudá ani lichá, rostoucí, ryze monotonní, prostá, zdola ohraničená
(vi) ani sudá ani lichá, klesající, ryze monotonní, prostá, zdola ohraničená
(vii) ani sudá ani lichá, rostoucí, ryze monotonní, prostá, není ohraničená
(viii) sudá, rostoucí na $(-\infty, 0)$, klesající na $(0, \infty)$, není monotonní ani prostá, zdola ohraničená
2. např.
 - (i) $\cos x$
 - (ii) $a^x, \log_a x$ pro $a > 0, a \neq 1$
 - (iii) $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$
 - (iv) $x, x^3, x^5, \dots, x^{-1}, x^{-3}, x^{-5}, \dots$
3. (i) $\{-1, -1, -1, 1, 1, 2\}$
(ii) $\{1, 1, -2, 2, 3\}$
(iii) $\{0, -1, 1, 1, -3\}$
4. (i) $P_1(x) = (x+1)^3(x-1)^2(x-2)$
(ii) $P_2(x) = (x-1)^2(x-2)(x+2)(x-3)$
(iii) $P_3(x) = x(x-1)^2(x+1)(x+3)$
5. (i) trojnásobný
(ii) dvojnásobný
(iii) trojnásobný
(iv) není kořenem
6. (i) není, $P_1(-1) = -8$
(ii) je, $P_2(-1) = 0$
(iii) je, $P_3(-1) = 0$
(iv) je, $P_4(-1) = 0$

- (v) není, $P_5(-1) = 12$
7. (i) $\{2, -1\}$
(ii) $\{-e, 0, \frac{3}{2}\}$
(iii) $\{-1, 0, 3, 3, 3\}$
(iv) $\{-5, -2 - 2, 1\}$
(v) $\{0, 0, 2, 2, 2\}$
8. (i) $x^6 - 3x^5 + 3x^4 + x^2 - 2x + 2 + \frac{2}{x+1}$
(ii) $-5x + 10 + \frac{-16x^2 - 23x + 44}{x^3 + 2x^2 - 4}$
(iii) $-x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}}{2x^2 - 3}$

REFERENCE

- ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.
- PETÁKOVÁ, J.: *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus 2003. ISBN 80-7196-099-3