7. Výpočet neurčitého integrálu pomocí vzorců, úpravou integrandu, metodou per partes. Kateřina Konečná

1. Integrujte podle základních vzorců:
   (*i*) $\int (x^3 + x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$
   (*ii*) $\int (\sqrt{x} + 3x^{-\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}x$
   (*iii*) $\int x^2(x-2)\,\mathrm{d}x$
   (*iv*) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
   (*v*) $\int (\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x$
   (*vi*) $\int \left(4 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$
   (*vii*) $\int \sqrt[3]{x^2}(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
   (*viii*) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$
   (*ix*) $\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$
2. Spočítejte integrály typu $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$:
   (*i*) $\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x$
   (*ii*) $\int (\cos 3x + 1)\,\mathrm{d}x$
   (*iii*) $\int (1+2x)^3\,\mathrm{d}x$
   (*iv*) $\int \sqrt[5]{2x-3}\,\mathrm{d}x$
   (*v*) $\int 7^{-2x+3}\,\mathrm{d}x$
   (*vi*) $\int \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x-5}\,\mathrm{d}x$
   (*vii*) $\int \frac{4}{\sqrt{2-3x}}\,\mathrm{d}x$
3. Spočítejte integrály typu $\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$
   (*i*) $\int \frac{2}{3-x}\,\mathrm{d}x$
   (*ii*) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,\mathrm{d}x$
   (*iii*) $\int \mathrm{cotg}x\,\mathrm{d}x$
   (*iv*) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{2-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
   (*v*) $\int \frac{2x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$
4. Spočítejte integrály typu $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x$
   (*i*) $\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
   (*ii*) $\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   (*iii*) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-18}}\,\mathrm{d}x$
   (*iv*) $\int \frac{1}{6-3x^2}\,\mathrm{d}x$
   (*v*) $\int \frac{1}{x^2-x+2}\,\mathrm{d}x$
   (*vi*) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x$
   (*vii*) $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x$
   (*viii*) $\int \frac{1}{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

5. Metodou per partes spočítejte integrály:

   (*i*) $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$
   (*ii*) $\int x \cos(x-1) \,\mathrm{d}x$
   (*iii*) $\int \ln x \,\mathrm{d}x$
   (*iv*) $\int (x^2+3x-1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$
   (*v*) $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$
   (*vi*) $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$
   (*vii*) $\int x\mathrm{e}^{2x+1} \,\mathrm{d}x$

Řešení

1. (*i*) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$
   (*ii*) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$
   (*iii*) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$
   (*iv*) $\frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + c$
   (*v*) $-\cos x - 2\sin x + c$
   (*vi*) $4x + \ln x + c$
   (*vii*) $\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$
   (*viii*) $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$
   (*ix*) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 2\sqrt{2} + c$
2. (*i*) $\sin x - x \cdot \cos x + c$
   (*ii*) $x \cdot \sin x + \cos x + c$
   (*iii*) $x\,(\ln x - 1) + c$
   (*iv*) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-3)^6} + c$
   (*v*) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{7^{-2x+3}}{\ln 7} + c$
   (*vi*) $3\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x-5} + c$
   (*vii*) $-\frac{8}{3}\sqrt{2-3x} + c$
3. (*i*) $-2\ln|3-x| + c$
   (*ii*) $\ln|2x^2 - 5x + 3| + c$
   (*iii*) $\ln|\sin x| + c$
   (*iv*) $-\ln|2 - \mathrm{e}^x| + c$
   (*v*) $\frac{1}{3}\ln|3x^2+1| + c$
4. (*i*) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$
   (*ii*) $\arcsin 3x + c$
   (*iii*) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x + \sqrt{x^2-9}| + c$
   (*iv*) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + c$

(*v*) $\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}+c$

(*vi*) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}|+c$

(*vii*) $\frac{1}{3}\arcsin(x+\frac{1}{3})+c$

(*viii*) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right|+c$

5. (*i*) $\sin x - x\cdot\cos x+c$

(*ii*) $x\cdot\sin(x-1)+\cos(x-1)+c$

(*iii*) $x\cdot(\mathrm{x}-1)+c$

(*iv*) $\mathrm{e}^x\cdot\left(x^2+x-2\right)+c$

(*v*) $\frac{1}{2}x^2\cdot\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$

(*vi*) $\frac{1}{2}\text{arctg}x(1+x^2)-\frac{1}{2}x+c$

(*vii*) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+c$

Doplněk ke cvičením. Řešené integrály typu $\int\frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int\frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}\,\mathrm{d}x$

1.
$$\int\frac{1}{x^2-4x+12}=\int\frac{1}{(x-2)^2+8}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{8}}\text{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{8}}+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+c$$
Rozklad na čtverec: $x^2-4x+12=x^2-2\cdot 2x+4+8=(x-2)^2+8$

2.
$$\int\frac{1}{2x^2+8x+20}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+2)^2+6}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{6}}\text{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+c$$
Rozklad na čtverec: $x^2+4x+10=x^2+2\cdot 2x+4+6=(x+2)^2+6$

3.
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\frac{1}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right|+c\\&=-\ln\left|\frac{x+1}{-x}\right|+c=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c\end{aligned}$$
Rozklad na čtverec: $x^2+x=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

4.
$$\int\frac{1}{-x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x-1}{\sqrt{3}-x+1}\right|+c$$
Rozklad na čtverec: $-(x^2-2x-2)=-(x^2-2\cdot 1x+1-3)=-\left((x-1)^2-3\right)=-(x-1)^2+3$

5.
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$
Rozklad na čtverec: $-(x^2+2x-1)=-(x^2+2\cdot 1x+1-2)=-\left((x+1)^2-2\right)=-(x+1)^2+2$

6.
$$\int \frac{3}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 3\arcsin\frac{x-1}{3} + c$$

Rozklad na čtverec: $-(x^2-2x-8) = -(x^2-2\cdot 1x+1-9) = -\left((x-1)^2-9\right) = -(x-1)^2+9$

7.
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right| + c$$

Rozklad na čtverec: $x^2-\frac{1}{2}x+1 = x^2-2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}+\frac{15}{16} = \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$

8.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + c$$

Rozklad na čtverec: $x^2+2x-3 = x^2+2\cdot 1x+1-4 = (x+1)^2-4$

Reference

ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky.* 2. díl, 5. vyd. Bratislava: Alfa 1979.

DĚMIDOVIČ, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* 1. vydání. Praha: Fragment 2003. ISBN 80-7200-587-1

[verze: 21. *XI.* 2013]